RCS Education

B.I.T. bravi in tutto

Giacomo Pagina
Giovanna Patri

risolto! 1

Percorsi di matematica per il ripasso e il recupero

per la Scuola secondaria di secondo grado

UNITÀ CAMPIONE

Edizioni del Quadrifoglio

Unità 1

Insiemi

La teoria degli insiemi stabilisce le regole per classificare e gestire gli astratti numeri come se fossero oggetti concreti, creando la struttura "grammaticale" del linguaggio matematico.

Unità 1

1.1 Introduzione al significato di insieme

Prof

La definizione di insieme richiama sinonimi intuitivi di uso comune, quali: *collezione*, *classe*, *famiglia*, *raccolta*, *gruppo*, ecc. Gli insiemi sono generalmente indicati con lettere maiuscole (*A*, *B*, ... *X*, ...).

Esempi

- L'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano.
- L'insieme M degli alunni maschi di una classe.
- L'insieme P dei punti di una retta.
- L'insieme K dei numeri minori di dieci.

Un qualsiasi oggetto che appartiene a un insieme è definito **elemento**.

Esempi

- Le lettere a, o, e i sono elementi che appartengono all'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano.
- Marco e Francesca sono elementi che compongono l'insieme A degli alunni di una classe.
- I numeri 3 e 7 sono elementi contenuti nell'insieme K dei numeri minori di dieci.
- L'insieme S è composto dagli elementi film in lingua originale.
- L'insieme B delle bandiere tricolori contiene l'elemento bandiera italiana.

L'appartenenza o meno di un elemento a un insieme si indica con i simboli $\in$ e $\notin$.

Esempi

- La lettera a appartiene all'insieme V, cioè $a \in V$.
- Il numero 8 non appartiene all'insieme T, cioè $8 \notin T$.

Affinché un oggetto sia considerato elemento di un insieme, occorre che rispetti le seguenti due caratteristiche di appartenenza.

- **Caratteristica di individuabilità**: consente di stabilire con certezza se un elemento appartiene o meno a un determinato insieme.
- **Caratteristica di distinguibilità**: verifica l'assenza di due o più elementi uguali in un medesimo insieme.

Gli elementi di un insieme devono essere quindi identificabili senza ambiguità e distinguibili.

Esempi

- Gli elementi che appartengono all'insieme dei "compositori tedeschi" soddisfano le due caratteristiche di appartenenza. È infatti possibile definire con certezza se un compositore è di cittadinanza tedesca, e non ha senso che un compositore compaia più di una volta.
- Gli elementi che appartengono all'insieme dei "compositori tedeschi più bravi" non soddisfano la condizione di individuabilità: un compositore può essere bravo per alcuni e non bravo per altri.

Un insieme è **vuoto** quando non contiene elementi e si indica con il simbolo $\varnothing$.

Esempio

Gli elementi dell'insieme R sono le regioni d'Italia che iniziano con la lettera g. L'insieme R è dunque un insieme vuoto, cioè

$$R = \varnothing$$

Gli elementi di un **insieme numerico** sono (ovviamente) numeri con cui è possibile svolgere determinate operazioni matematiche. In generale, due insiemi numerici A e B si distinguono per le diverse operazioni che si possono eseguire con i rispettivi elementi-numeri. Gli insiemi numerici che conosci sono:

- insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$;
- insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$;
- insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$;
- insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Esercizi 1.1

1. Indica quali tra le seguenti descrizioni individuano un insieme.

a I libri della biblioteca della tua scuola.
b Gli alunni che sono esperti nel disegno.
c Le cifre del numero 134.
d Gli alunni alti della tua classe.
e Gli alunni della tua classe alti più di 165 cm.
f Le città con tanti abitanti.
g Le città con più di 50 000 abitanti.
h Le cifre pari del numero 1 353.
i Le vocali della parola *studente*.
l I numeri naturali il cui quadrato vale – 4.

1.2 Rappresentazione degli insiemi

Prof

Per rappresentare un insieme esistono tre modalità tra loro equivalenti.

Modalità elencazione. Gli elementi dell'insieme sono elencati tra una coppia di parentesi graffe, preceduta dalla lettera che identifica l'insieme e dal simbolo di uguale (non ha importanza la posizione occupata dagli elementi nell'elenco). Nel caso di **insieme infinito**, cioè di un insieme con numero infinito di elementi, si scrivono alcuni elementi dell'insieme seguiti da punti di sospensione.

Esempi

- Gli elementi dell'insieme Q sono i satelliti naturali di Marte: Fobos e Deimos. La rappresentazione in modalità elencazione è

$$Q = \{\text{Fobos, Deimos}\}$$

- Per l'insieme infinito $\mathbb{N}$ la rappresentazione in modalità elencazione è

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Modalità caratteristica. Si dichiara la proprietà che caratterizza l'appartenenza degli elementi di un insieme tra una coppia di parentesi graffe, preceduta dalla lettera che identifica l'insieme e dal simbolo di uguale. In alternativa, tra le parentesi si scrive l'elemento generico dell'insieme seguito dal simbolo | che significa "tale che".

Esempio

L'insieme F contiene i numeri naturali compresi tra 5 e 10: la rappresentazione in modalità caratteristica è

$$F = \{\text{numeri naturali compresi tra 3 e 5}\}$$

oppure con l'opzione "tale che"

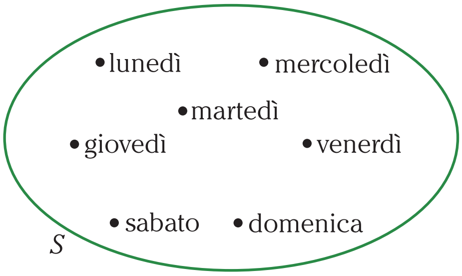
$$F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 3 < x < 5\}$$

che si legge "l'insieme F è composto dagli elementi x tale che x è un numero naturale compreso tra 3 e 5".

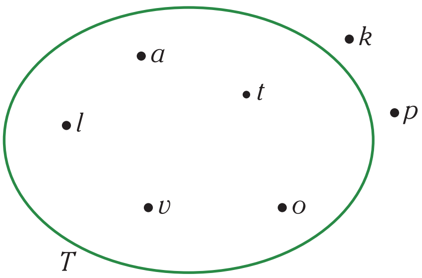
Modalità grafica (Eulero-Venn). Si collocano gli elementi di un insieme all'interno di una linea chiusa; il singolo elemento è rappresentato da un punto affiancato dal nome o dal simbolo del relativo elemento.

Esempi

- L'insieme S è composto dai giorni della settimana; in figura la rappresentazione in modalità grafica.

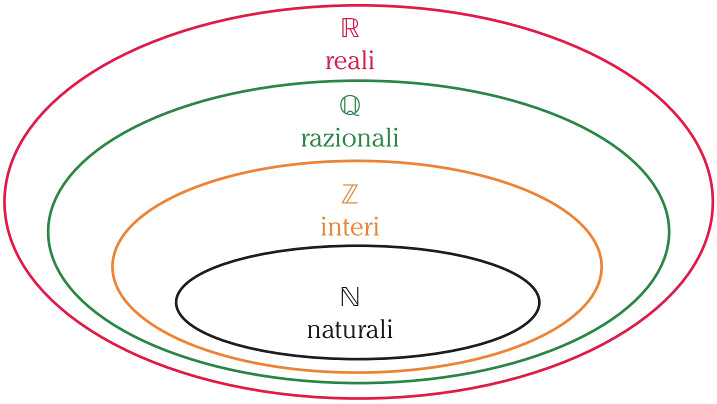


- L'insieme T è composto dalle lettere della parola *tavolo*. Le lettere k e p non appartengono all'insieme T; in figura la rappresentazione in modalità grafica.



Per insiemi con un numero elevato di elementi è preferibile adottare la modalità caratteristica. La modalità grafica ha invece il vantaggio di fornire una visione immediata di un insieme ed è utile per comprendere le operazioni e le definizioni fondamentali della teoria degli insiemi.

Gli elementi di un insieme numerico sono numeri caratterizzati dalla capacità di svolgere determinate operazioni.
Affinché i numeri di un insieme siano idonei a compiere ulteriori operazioni, occorre ampliare l'insieme con altri numeri.
Per questo motivo, l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ è ampliato all'insieme degli interi $\mathbb{Z}$, che a sua volta è ampliato all'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ e all'insieme dei reali $\mathbb{R}$. In figura il grafico di Eulero-Venn evidenzia il caratteristico progressivo ampliamento degli insiemi numerici.



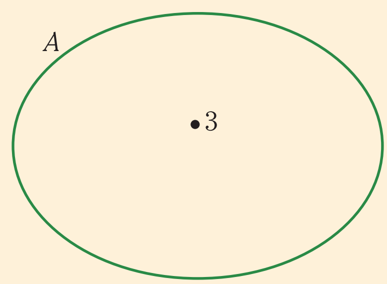
Esercizi 1.2

Rappresenta per elencazione, per caratteristica e con grafico di Eulero-Venn i seguenti insiemi.

Trainer

2. L'insieme A delle cifre del numero 32 147.

Per rappresentare l'insieme A per elencazione, devi scrivere gli elementi di A tra parentesi ……………, separati da ……………:
$A = \{3, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$.
Per gli elementi di un insieme non è necessario seguire un ordine preciso; quindi l'insieme A lo puoi anche scrivere come $A = \{2, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$, oppure come $A = \{7, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$. Se però gli elementi di un insieme sono numeri, è più comodo scriverli in ordine crescente; quindi, in questo caso, come $A = \{1, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$.
Per rappresentare l'insieme A per caratteristica, devi scrivere tra parentesi …………… l'elemento generico …………… dell'insieme seguito dal simbolo "tale che" e dalla proprietà che lo caratterizza: $A = \{x \mid \ldots\}$.
Per rappresentare l'insieme A con il grafico di Eulero-Venn, devi scrivere dentro una linea …………… tanti punti quanti sono gli elementi dell'insieme, e a fianco di ciascun punto devi indicare il nome di ogni elemento come in figura.



3. Le prime cinque lettere dell'alfabeto.

4. I primi tre mesi dell'anno.

Trainer

5. I numeri naturali da 0 a 6.

L'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$.

6. L'insieme delle lettere della parola *mamma*.

Le lettere *a* e *m* devono essere scritte una sola volta perché gli elementi di un insieme non devono essere ripetuti.

Rappresenta per elencazione e con grafico di Eulero-Venn i seguenti insiemi.

7. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$

8. $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è divisore di $8\}$

9. $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x$ multiplo di 3, x dispari$\}$

10. $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2n + 1, 4 < x \leq 12, n \in \mathbb{N}\}$

Rappresenta per caratteristica i seguenti insiemi.

11. $A = \{1, 3, 5, 7\}$

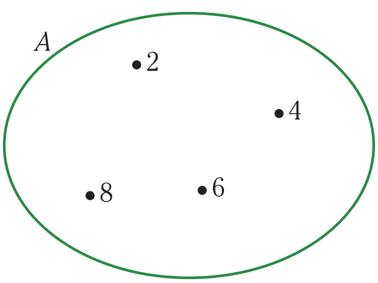
12. $C = \{-3, -2, -1, 0\}$

13. $D = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

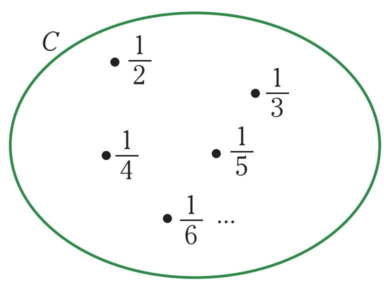
14. $E = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

Rappresenta per elencazione e per caratteristica i seguenti insiemi.

15.



16.



Trainer

17. Dato l'insieme $A = \{2, 3, a, b, c, \text{casa}\}$, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. $2 \in A$ V F
b. $c \in A$ V F
c. $s \in A$ V F
d. $ca \notin A$ V F
e. $\{\text{casa}\} \in A$ V F

L'elemento casa appartiene ad A; la scrittura $\{\text{casa}\}$ indica l'insieme che ha come unico elemento casa e, quindi, $\{\text{casa}\}$ non è un elemento di A.

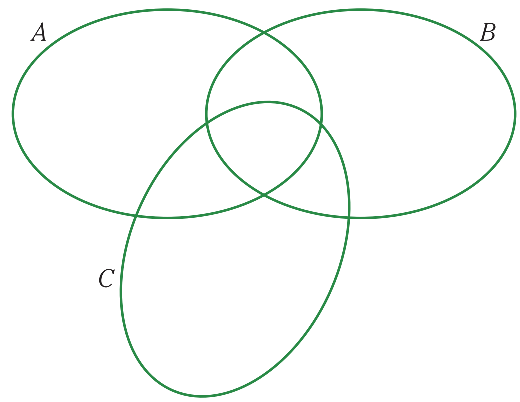
18. Dato l'insieme $C = \{a, 1, \{2\}, \{2, 3\}\}$, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. $a \in C$ V F
b. $1 \notin C$ V F
c. $2 \in C$ V F
d. $3 \notin C$ V F
e. $\{2, 3\} \in C$ V F

L'insieme $\{2, 3\}$ che contiene gli elementi 2 e 3 è un elemento dell'insieme C.

19. Colloca nel grafico a fianco gli elementi a, b, c, d, seguendo le indicazioni di appartenenza di ciascun elemento.

$a \in A$	$a \in B$	$a \notin C$
$b \in A$	$b \in B$	$b \in C$
$c \notin A$	$c \in B$	$c \notin C$
$d \in A$	$d \notin B$	$d \notin C$
$e \in A$	$e \notin B$	$e \in C$



1.3 Operazioni con insiemi

Prof

Le possibili operazioni tra insiemi sono: intersezione, unione, differenza, prodotto cartesiano.

- Dati gli insiemi A e B, l'operazione di intersezione ricerca gli elementi comuni ai due insiemi. Il risultato dell'operazione è l'**insieme intersezione**, in simboli

$$A \cap B$$

e si legge ***A* intersezione *B***. L'operazione è valida per un numero N qualsiasi di insiemi e, in questo caso, l'insieme intersezione è composto dagli elementi comuni a tutti gli N insiemi, cioè $A \cap B \cap C \dots \cap \dots$

In modalità caratteristica l'insieme intersezione è

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } B\}}$$

dove la congiunzione "e" evidenzia la condizione che gli elementi dell'insieme intersezione devono appartenere *a entrambi* gli insiemi A e B.

Esempio

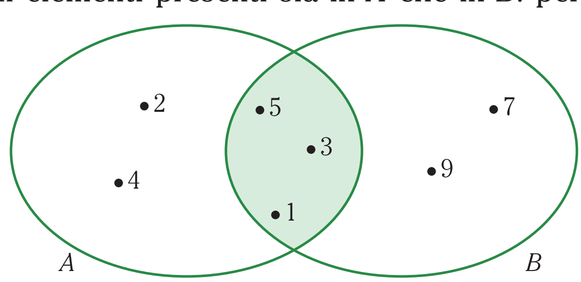
Siano dati gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{e} \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

L'insieme intersezione contiene gli elementi presenti sia in A che in B: per elencazione abbiamo dunque

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

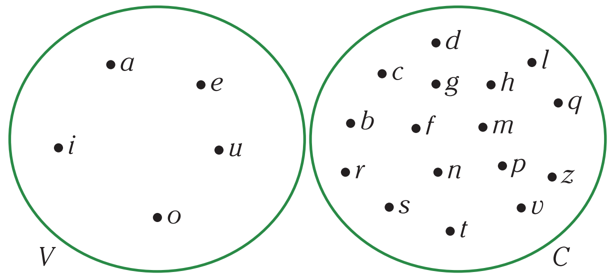
In figura, la rappresentazione in modalità grafica dove la parte in colore indica l'insieme intersezione.



Due o più insiemi si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune, cioè se la loro intersezione è l'insieme vuoto. Quindi, se A e B sono due insiemi disgiunti, il loro insieme intersezione è $A \cap B = \varnothing$.

Esempio

L'insieme V delle vocali e l'insieme C delle consonanti sono disgiunti: una consonante non può essere vocale e una vocale non può essere consonante.



L'intersezione tra due insiemi uguali è l'insieme stesso, cioè $A \cap A = A$. Infatti gli elementi comuni a entrambi gli insiemi A sono, ovviamente, gli elementi dell'insieme A.
L'intersezione tra l'insieme A e l'insieme vuoto è l'insieme vuoto, cioè $A \cap \varnothing = \varnothing$. Infatti, essendo l'insieme vuoto privo di elementi, l'intersezione che prevede gli elementi comuni dei due insiemi è un insieme privo di elementi.

▸ Dati gli insiemi A e B, l'operazione di unione ricerca tutti gli elementi degli insiemi. Il risultato dell'operazione è l'**insieme unione**, in simboli

$$A \cup B$$

e si legge ***A* unione *B***. L'operazione è valida per un numero N qualsiasi di insiemi e, in questo caso, l'insieme unione è composto dagli elementi di tutti gli N insiemi, cioè $A \cup B \cup C \ldots \cup \ldots$

In modalità caratteristica l'insieme unione è

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } B\}}$$

dove la congiunzione "o" evidenzia la condizione che gli elementi dell'insieme unione devono appartenere *almeno a uno* degli insiemi A e B.

Esempio

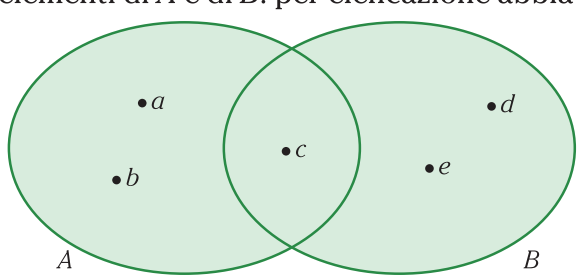
Siano dati gli insiemi

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{e} \qquad B = \{c, d, e\}$$

L'insieme unione contiene tutti gli elementi di A e di B: per elencazione abbiamo dunque

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

In figura, la rappresentazione in modalità grafica dove la parte in colore indica l'insieme unione.



L'unione tra due insiemi uguali è l'insieme stesso, cioè $A \cup A = A$. Infatti gli elementi che appartengono ad A o ad A sono gli elementi stessi di A.
L'unione tra l'insieme A e l'insieme vuoto è ovviamente l'insieme A, cioè $A \cup \varnothing = A$.

- Dati gli insiemi A e B, l'operazione differenza tra A e B ricerca gli *elementi di A che non appartengono a B*. Il risultato dell'operazione è l'**insieme differenza**, in simboli

$$A - B$$

e si legge ***A* non appartiene a *B*** oppure ***A* meno *B***. In modalità caratteristica l'insieme differenza è

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

dove i simboli $\in$ e $\notin$ evidenziano che l'elemento dell'insieme differenza deve appartenere al primo insieme (A) e non al secondo (B).

Esempio

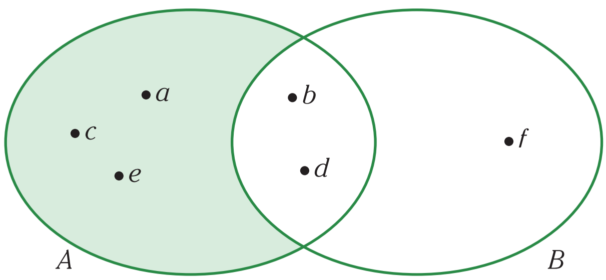
Siano dati gli insiemi

$$A = \{a, b, c, d, e\} \qquad \text{e} \qquad B = \{b, d, f\}$$

L'insieme differenza tra A e B contiene gli elementi di A che non appartengono a B: per elencazione abbiamo dunque

$$A - B = \{a, c, e\}$$

In figura, la rappresentazione in modalità grafica dove la parte in colore indica l'insieme differenza.



- Siano dati due insiemi non vuoti A e B, con A primo insieme e B secondo insieme. Si definisce **coppia ordinata di elementi** la coppia formata da un qualsiasi elemento a di A e da un qualsiasi elemento b di B, $\boldsymbol{(a, b)}$ dove alla sinistra della virgola si colloca l'elemento del primo insieme, e alla destra l'elemento del secondo insieme.

Attenzione: non si possono cambiare le posizioni degli elementi di una coppia ordinata, perché si ottiene una diversa coppia ordinata, cioè in generale $(a, b) \neq (b, a)$.

- Siano dati due insiemi non vuoti A e B, con A indicato come primo insieme e B come secondo insieme. Si definisce **prodotto cartesiano** di A e B l'insieme che ha come elementi *tutte le possibili coppie ordinate estratte* da A e B; in simboli

$$\boxed{A \times B}$$

Ovviamente, nelle coppie ordinate i due elementi devono essere collocati rispettando l'ordine degli insiemi del prodotto cartesiano: a sinistra della virgola l'elemento del primo insieme, e a destra della virgola l'elemento del secondo insieme.
Se l'insieme A contiene n elementi e l'insieme B contiene m elementi, l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ contiene $n \times m$ elementi.

Attenzione: il prodotto cartesiano contiene coppie ordinate e, poiché $(a, b) \neq (b, a)$, il prodotto cartesiano non gode della proprietà commutativa, cioè $A \times B \neq B \times A$.

Esempio

Siano dati i due insiemi

$$A = \{x, y\} \qquad \text{e} \qquad B = \{m, n\}$$

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme composto da tutte le possibili coppie con a sinistra della virgola un elemento di A e alla destra della virgola un elemento di B; quindi

$$A \times B = \{(x, m), (x, n), (y, m), (y, n)\}$$

Per il prodotto cartesiano $B \times A$ si procede in modo analogo, facendo sempre attenzione all'ordine degli elementi nella coppia; quindi

$$B \times A = \{(m, x), (n, x), (m, y), (n, y)\}$$

dove osserviamo che gli insiemi relativi ai due prodotti cartesiani sono diversi, a conferma della non commutatività del prodotto cartesiano.

Se uno dei due insiemi A o B è vuoto, per convenzione il prodotto cartesiano è l'insieme vuoto, cioè $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

L'insieme $A \times B$ si rappresenta con un particolare **grafico cartesiano**:

1. si tracciano due rette tra loro perpendicolari;
2. si associano gli elementi di A ai punti dell'asse orizzontale e quelli di B ai punti dell'asse verticale;
3. per i punti-elementi di ogni asse si tracciano le parallele all'altro asse.

In conclusione, si ottiene un *reticolato* i cui punti di incrocio (chiamati *nodi*) rappresentano gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Esempio

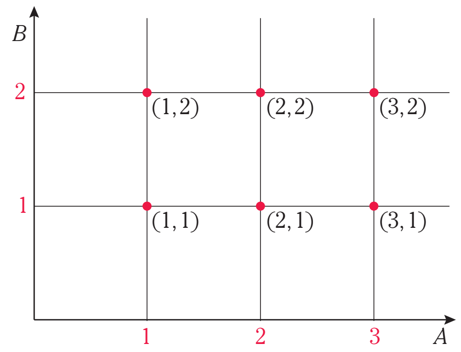
Siano dati gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad \text{e} \qquad B = \{1, 2\}$$

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è composto dalle seguenti coppie ordinate

$$A \times B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

In figura il relativo reticolato con evidenziati i sei nodi.



Esercizi 1.3

Trainer

20. Dati gli insiemi

$$A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola matematica}\}$$

e

$$B = \{x \mid x \text{ è una consonante della parola muscolo}\}$$

scrivi per elencazione gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.

Rappresenta dapprima gli insiemi A e B per elencazione:

$A = \{$..$\}$

$B = \{$..$\}$

Gli elementi dell'insieme intersezione tra A e B appartengono a ....,

quindi $A \cap B = \{$.........., ...$\}$.

Gli elementi dell'insieme unione tra A e B appartengono a ....,

quindi $A \cup B = \{$.........., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...$\}$.

Gli elementi dell'insieme differenza tra A e B appartengono a ....,

quindi $A - B = \{$.........., ..., ..., ...$\}$.

Gli elementi dell'insieme differenza tra B e A appartengono a ....,

quindi $B - A = \{$.........., ...$\}$.

21. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{7, 8, 9, 12\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.

22. Dati gli insiemi $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 4\}$ e $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 1\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi $S \cap T$, $S \cup T$, $S - T$ e $T - S$.

Trainer

23. Dati gli insiemi $A = \{3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, rappresenta graficamente gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$.

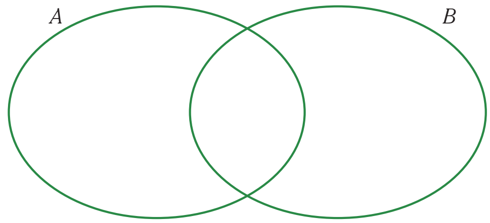
Gli elementi comuni si scrivono nella parte comune ai due insiemi.

24. Dati gli insiemi $P = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -1 \leq x < 5\}$ e $Q = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 0\}$, rappresenta graficamente l'insieme $P \cap Q$.

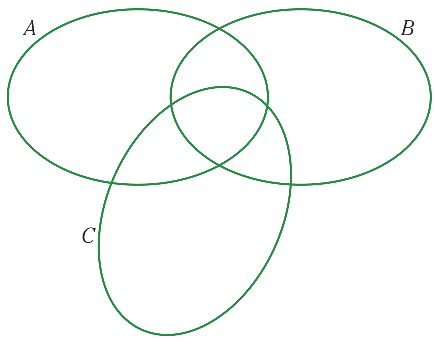
25. Dati gli insiemi $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ divide } 18\}$ e $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ divide } 15\}$, determina gli insiemi $C \cap D$, $C \cup D$, $C - D$, $D - C$ e rappresentali con grafici di Eulero-Venn.

Dati gli insiemi rappresentati nelle figure, colora l'insieme indicato.

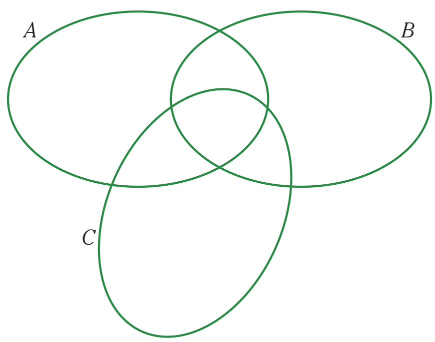
26. $A \cup B$



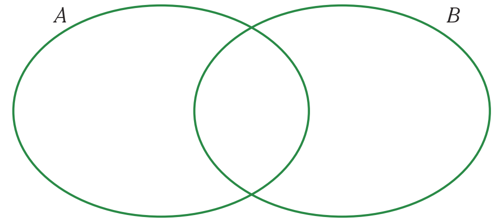
27. $B \cup C$



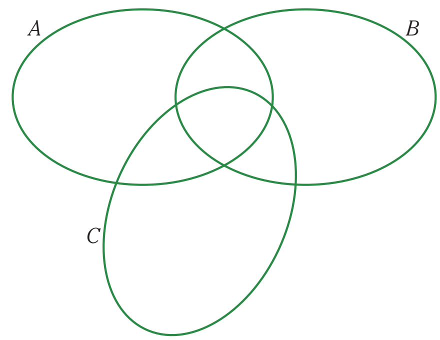
28. $A \cup B \cup C$



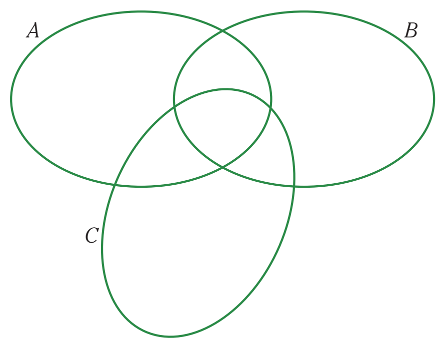
29. $A \cap B$



30. $B \cap C$



31. $A \cap B \cap C$



32. Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $C = \{a, b, c\}$, determina se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

a. $A \cap B = B$ V F
b. $A \cap B \cap C = \varnothing$ V F
c. $A \cap C = \varnothing$ V F
d. $B \cap C = B$ V F
e. $A \cap B \cap C = A$ V F
f. $A \cap C = C$ V F
g. $A \cap B = C$ V F
h. $A \cap B \cap C = C$ V F
i. $B \cap C = C$ V F

Rappresenta graficamente le seguenti operazioni di intersezione.

33. $A \cap B = \varnothing$

34. $A \cap B \cap C = \varnothing$

35. $A \cap B = B$

36. $A \cap B = C$

37. $A \cap B = A$

Dato l'insieme $A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, trova almeno un insieme X tale che valgano le seguenti uguaglianze.

38. $A \cap X = A$

39. $A \cap X = \{3, 6\}$

40. $A \cup \varnothing = X$

41. $A \cup X = A$

42. $A \cap X = \varnothing$

43. $A \cap A = X$

Trainer

44. Dati gli insiemi $A = \{0, 3, 6, 7, 12\}$, $B = \{0, 2, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, rappresenta per elencazione l'insieme $(A - B) \cap C$.

Esegui dapprima l'operazione tra parentesi e trova l'insieme differenza $A - B$. Quindi trova l'intersezione di tale insieme con C.

45. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2n + 1, x \geq 3\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi $(A \cup B) \cap C$ e $(C - B) \cup A$.

Trainer

46. Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, d\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi $A \times B$, $B \times A$ e $A \times A$. Qual è il numero di elementi di questi insiemi?

L'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie .... di elementi, il primo dei quali appartenente a .... e il secondo a ....

$A \times B = \{(a, b), (a, \ldots), (b, \ldots), (b, \ldots), (c, \ldots), (\ldots, \ldots)\}$

Il numero di elementi di $A \times B$ è ....

L'insieme prodotto cartesiano $B \times A$ è l'insieme di tutte le coppie .... di elementi, il primo dei quali appartenente a .... e il secondo a ....

$B \times A = \{(b, a), (b, \ldots), (b, \ldots), (d, \ldots), (d, \ldots), (\ldots, \ldots)\}$

Verifica che $A \times B$ è .... da $B \times A$; infatti il prodotto cartesiano non gode della proprietà ....

Il numero di elementi di $B \times A$ è uguale a quello di $A \times B$.

L'insieme $A \times A$ (o A^2) è l'insieme di tutte le coppie ordinate di elementi, entrambi appartenenti all'insieme ....Quindi

$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, \ldots), (b, \ldots), (b, \ldots), (\ldots, \ldots), (c, \ldots), (\ldots, \ldots), (\ldots, \ldots)\}$

Il numero di elementi di $A \times A = A^2$ è $\ldots^2$.

In generale, se un insieme A ha n elementi, il numero di elementi di $A \times A = A^2$ è $\ldots^2$.

47. Dati gli insiemi $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$, rappresenta per elencazione l'insieme $A \times B$.

48. Se F ha 8 elementi e G ne ha 2, quanti elementi contiene $F \times G$? Quanti $G \times F$?

49. Sapendo che $F \times G = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$, determina F e G.

50. Dati gli insiemi $A = \{b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$ trova e rappresenta per elencazione l'insieme X nei seguenti casi.

a. $X = A \times B$

b. $X = B \times A$

c. $X = A \times A$

d. $A \times X = \{(b, x), (c, x)\}$

e. $X \times B = \{(6, 1), (6, 2), (8, 1), (8, 2)\}$

51. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$ rappresenta per elencazione l'insieme $A \times B$. Dire se sono vere o false le seguenti relazioni.

a. $1 \in A \times B$ V F

b. $4 \notin A \times B$ V F

c. $(1, 4) \in A \times B$ V F

d. $(4, 1) \notin A \times B$ V F

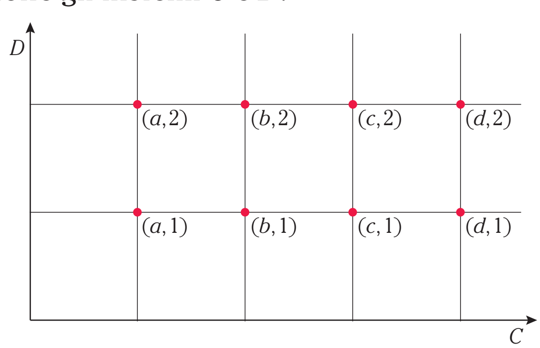
Trainer

52. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, a\}$ e $B = \{2, 3\}$, rappresenta graficamente $A \times B$.

Traccia due rette tra loro perpendicolari.
Associa a tre punti sull'asse orizzontale gli elementi di A, cioè 1, 2 e a, e a due punti sull'asse verticale quelli di B, cioè 2 e 3.
Conduci dai punti dell'asse orizzontale che rappresentano gli elementi di A le parallele all'asse verticale e, analogamente, conduci dai punti dell'asse verticale che rappresentano gli elementi di B le parallele all'asse orizzontale.
I punti di .... di tali rette, detti ...., rappresentano gli elementi dell'insieme ....

53. Dati gli insiemi $P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 5\}$ e $Q = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 3\}$, rappresenta graficamente l'insieme $P \times Q$.

54. Data la rappresentazione grafica del prodotto cartesiano $C \times D$, rappresenta per elencazione gli insiemi C e D.



55. Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è divisore di } 10\}$ e $B = \{0, 1\}$, rappresenta graficamente l'insieme $A \times B$.

1.4 Confronto tra insiemi

Prof

Due insiemi sono uguali quando contengono i medesimi elementi. Sono diversi quando uno o più elementi contenuti in un insieme sono differenti o non compaiono nell'altro insieme.

Esempi

- Gli elementi dell'insieme A sono le lettere della parola rami: se si sceglie la modalità per elencazione si scrive

$$A = \{\mathrm{r, a, m, i}\}$$

Gli elementi dell'insieme B sono le lettere della parola armi, perciò

$$B = \{\mathrm{a, r, m, i}\}$$

Gli insiemi A e B contengono i medesimi elementi e perciò sono uguali, cioè

$$A = B$$

- Gli elementi dell'insieme P sono

$$A = \{2, 4, 7, d\}$$

e gli elementi dell'insieme B sono

$$B = \{2, 4, p, 7\}$$

Gli insiemi A e B non contengono i medesimi elementi, perciò sono diversi

$$A \neq B$$

- Un insieme A è definito **sottoinsieme** di un insieme B se ogni elemento dell'insieme A appartiene anche all'insieme B.
Dato un qualunque insieme non vuoto A, esso ammette come sottoinsiemi l'insieme vuoto e l'insieme A stesso. Tali sottoinsiemi sono detti **sottoinsiemi impropri** di A e per indicarli si utilizza il simbolo di inclusione impropria $\subseteq$: quindi, per quanto appena affermato, $A \subseteq A$ e $\varnothing \subseteq A$.
Gli altri eventuali sottoinsiemi di A sono invece detti **sottoinsiemi propri** di A; il simbolo di inclusione propria è $\subset$.

Esempio

L'insieme

$$X = \{3, 4, 9\}$$

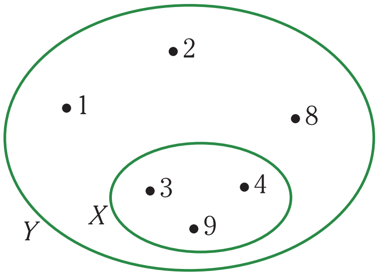
è sottoinsieme proprio dell'insieme

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 9, 8\}$$

cioè

$$X \subset Y$$

La figura rappresenta l'inclusione propria in grafico di Eulero-Venn.
L'insieme Y ammette come sottoinsiemi, oltre al sottoinsieme proprio X, i sottoinsiemi impropri Y e $\varnothing$. Quindi



$$Y \subseteq Y \quad \text{e} \quad \varnothing \subseteq Y$$

- Dato un insieme A, si definisce **insieme delle parti** di A, indicato come

$$P(A)$$

l'insieme che ha come elementi tutti i possibili sottoinsiemi (propri e impropri) dell'insieme A.
Se l'insieme A contiene n elementi, l'insieme delle parti $P(A)$ ne contiene 2^n.

Esempio

Dato l'insieme

$$Z = \{a, b, c\}$$

il relativo insieme delle parti in modalità elencazione è

$$P(Z) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varnothing\}$$

Il numero n di elementi di Z è $n = 3$. Allora l'insieme delle parti di Z, $P(Z)$, contiene $2^3 = 8$ elementi.

- L'**insieme universo** è un qualsiasi insieme da cui si estraggono elementi al fine di creare nuovi insiemi. Solitamente è indicato con la lettera U e il contorno del grafico è generalmente a forma di rettangolo.

Esempio

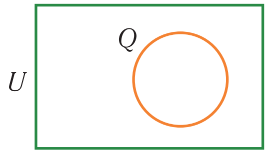
- Si consideri l'insieme

$$Q = \{\text{figure piane quadrilatere}\}$$

Gli elementi di Q sono estratti dall'insieme universo

$$U = \{\text{figure piane}\}$$

La figura a fianco rappresenta il grafico di Eulero-Venn.



- L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è l'insieme universo dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
La figura rappresenta l'affermazione in grafico di Eulero-Venn.

- Dato un generico insieme A, si consideri un suo sottoinsieme B. Si definisce **insieme complementare** di B rispetto all'insieme A, l'insieme composto dagli *elementi di A che non appartengono* a B. L'insieme complementare è indicato con la notazione

$$C_A(B)$$

dove la lettera C è l'iniziale di complementare, la lettera tra parentesi indica il sottoinsieme e la lettera a pedice l'insieme che contiene il sottoinsieme.
L'insieme complementare di B si può anche esprimere con $\overline{B}$.
In modalità caratteristica, l'insieme complementare è

$$\boxed{C_A(B) = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

Essendo B sottoinsieme di A, l'insieme complementare di B definito dalla caratteristica coincide con l'insieme differenza tra A e B, cioè

$$C_A(B) = A - B$$

Esempio

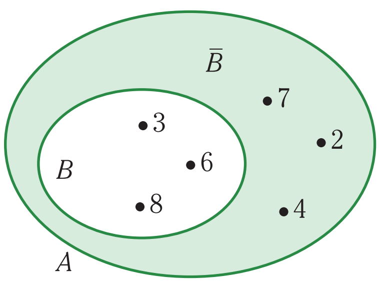
Siano dati gli insiemi

$$A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\} \qquad \text{e} \qquad B = \{3, 6, 8\}$$

L'insieme B è sottoinsieme proprio di A perché tutti i suoi elementi appartengono anche all'insieme A.
L'insieme complementare di B rispetto ad A comprende tutti gli elementi di A che non sono contenuti in B, quindi

$$C_A(B) = \{2, 4, 7\} = A - B$$

Nel grafico di Eulero-Venn la parte in colore indica l'insieme complementare $C_A(B)$.



Valgono le relazioni: $C_A(A) = \varnothing$, $C_A(\varnothing) = A$, $C_U(C_U(A)) = A$.

Esercizi 1.4

Trainer

56. Considera gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, c, d\}$. È corretto affermare che B è sottoinsieme proprio di A? Rappresenta per elencazione gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$. Quali considerazioni puoi trarre?

Poiché ogni elemento di B appartiene ad A, B è .... di A e si scrive B .... A. Infatti i sottoinsiemi impropri di A sono $\varnothing$ e A stesso.
Rappresenta per elencazione gli insiemi $A \cup B = \{$...............$\}$ e $A \cap B = \{$...............$\}$.
In generale, puoi concludere che, se $B \subset A$, allora $A \cup B =$ .... e $A \cap B =$ ....

57. Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, c\}$, stabilisci se uno dei due insiemi è sottoinsieme proprio dell'altro.

58. Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$.

59. È corretto affermare che ogni insieme ammette sempre due sottoinsiemi impropri? Se sì, quali sono?

Trainer

60. Verifica graficamente che se A, B e C sono tre insiemi tali che

$$A \subseteq B \qquad \text{e} \qquad A \subseteq C$$

allora valgono le seguenti relazioni:

a. $A \subseteq A \cup B$ **b.** $A \subseteq B \cap C$ **c.** $A \subseteq A \cap C$ **d.** $B \cap C \neq \varnothing$

Rappresenta dapprima con grafici di Eulero-Venn gli insiemi A, B e C in modo che soddisfino le condizioni assegnate $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$. Quindi verifica le relazioni richieste.

61. Se $A = \{a, b, c\}$, le seguenti relazioni sono vere o false?

a. $a \in A$ V F
b. $b \in A$ V F
c. $c \subseteq A$ V F
d. $\{a, b, c\} \subseteq A$ V F
e. $\{a\} \in A$ V F
f. $\varnothing \subset A$ V F
g. $\varnothing \subseteq A$ V F
h. $\{a, c\} \subset A$ V F

Trainer

62. Dato l'insieme $A = \{x \mid x$ è vocale della parola naso$\}$, determina l'insieme delle parti di A.

Scrivi per elencazione l'insieme A .... Scrivi tutti i possibili sottoinsiemi propri e impropri di A ....
L'insieme delle parti di A è quindi $P(A) =$ ....
e contiene 4 elementi, cioè $2^{\dots}$ elementi.
Osserva che $a \in A$, mentre a .... $P(A)$, $\{a\}$ .... $P(A)$, $\{a\}$ .... A.

63. Rappresenta per elencazione l'insieme $P(C)$, con
$C = \{x \mid x$ è vocale della parola casa$\}$

64. Dati $A = \{\{2\}, \{0\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, rappresenta per elencazione $P(B) \cup A$ e $P(B) \cap A$.

65. Assegnato l'insieme $P(A) = \{\{(1, 2)\}, \{1\}, \varnothing, \{(1, 2), 1\}\}$ rappresenta con grafico di Eulero-Venn l'insieme A.

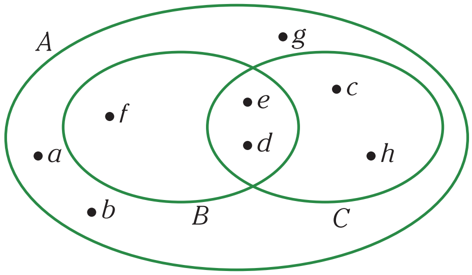
66. Dato l'insieme $A = \{2, \{0, 1\}\}$, rappresenta per elencazione $P(A)$.

Trainer

67. Dati gli insiemi $E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ e $A = \{3, 5, 7, 9\}$, rappresenta per elencazione l'insieme $C_E(A)$.

L'insieme $C_E(A)$ coincide con l'insieme .... tra .... e ....:
$C_E(A) =$ .... $-$ .... $= \{$..$\}$

68. Dato il grafico di Eulero-Venn in figura rappresenta per elencazione ciascuno degli insiemi indicati:



a. $C_A(B \cap C)$
b. $C_A(B \cup C)$
c. $C - B$
d. $C_A(C - B)$

69. Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 5\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 19\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi $C_{\mathbb{N}}(A)$ e $C_{\mathbb{N}}(B)$.

Trainer

70. Aiutandoti con la rappresentazione grafica, dimostra che valgono le seguenti relazioni (*relazioni di De Morgan*):

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Per la dimostrazione della prima relazione, traccia il grafico di Eulero-Venn di due insiemi A e B non disgiunti, sottoinsiemi dell'insieme universo U.
Considera il loro insieme intersezione e quindi il complementare in U di tale insieme e verifica che esso coincide con l'unione dei complementari in U degli insiemi A e B.
Per la dimostrazione della seconda relazione, prendi di nuovo come riferimento il grafico con i due insiemi non disgiunti A e B.
Considera il loro insieme unione e quindi il complementare in U di tale insieme e verifica che esso coincide con l'intersezione dei complementari in U degli insiemi A e B.
Naturalmente, devi ripetere la verifica al caso di due insiemi A e B disgiunti e a quello di due insiemi A e B uguali.

Esercizi di riepilogo

71. Indica quale tra i seguenti insiemi sono vuoti.

- a $A=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x<0\}$
- b $B=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è divisibile per 3 e per 8$\}$
- c $C=\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x=1\}$
- d $D=\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 2x=1\}$

72. Rappresenta per elencazione e con grafico di Eulero-Venn l'insieme $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2<x \leq 4$

73. Dati gli insiemi $P=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è pari$\}$ e $Q=\{x \mid x \in \mathbb{N}, 10<x<20\}$, rappresenta per elencazione $P \cap Q$.

74. Rappresenta graficamente l'unione tra gli insiemi $S=\{7, 0, 6, 12, 3\}$, $T=\{0, 2, 3, 5\}$ e $V=\{2, 4, 6, 8\}$.

75. Dati gli insiemi $A=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x=2n+1, n \in \mathbb{N}, n \leq 1\}$ e $B=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x=n+2, n \in \mathbb{N}, n \leq 1\}$, rappresenta per elencazione $A \cup B$ e $A \cap B$.

76. Dati gli insiemi $F=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $G=\{6, 7, 8, 9\}$ e $H=\{10, 11, 12\}$, determina almeno un insieme X tale che

a. $F \cup G \cup H=X$ b. $X-F=G$ c. $G \cup X=G$

77. Dati gli insiemi $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d\}$ e $C=\{d, e, f\}$, trova per elencazione

a. $A \cup B$ c. $A \cap (B \cup C)$ e. $(A \cup B) \cap C$
b. $A \cap B$ d. $(A \cap C) \cup B$ f. $(B \cup B) \cap B$

78. È corretto scrivere che $\{a, b\}=\{b, a\}$? E scrivere che $(a, b)=(b, a)$?

79. Dati gli insiemi $A=\{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 3\}$ e $B=\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 3\}$, rappresenta graficamente il prodotto $A \times B$.

80. Dati due insiemi A e B qualunque, le seguenti relazioni sono vere o false?

a. $A \subseteq (A \cup B)$ V F c. $(B \cup A) \subseteq A$ V F
b. $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ V F d. $(A \cap B) \subseteq B$ V F

81. Determina l'insieme delle parti dell'insieme $A=\{-2, 0, 4\}$.

82. Dati gli insiemi $A=\{x \mid x$ è lettera della parola maremma$\}$ e $B=\{x \mid x$ è lettera della parola mamma$\}$, rappresenta per elencazione l'insieme $C_A(B)$.

83. Dati gli insiemi $A=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$ e $B=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x=2n+1, n \in \mathbb{N}\}$, rappresenta per caratteristica $C_{\mathbb{N}}(A)$ e $C_{\mathbb{N}}(B)$.

Test di autovalutazione

Prof **Trainer**

Per valutare il tuo livello di preparazione sugli argomenti dell'Unità, risolvi i seguenti esercizi e confronta i risultati con quelli riportati a pagina 278. Se hai svolto correttamente almeno sei esercizi, la tua preparazione è sufficiente.

1. Rappresenta per elencazione e con grafico di Eulero-Venn l'insieme $A = \{x \mid x = 5n, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$.

2. Dato l'insieme $A = \{1, \{2, 3\}, 4, 5, \{6\}\}$, quali delle seguenti relazioni sono vere e quali false?

a. $1 \in A$ V F **b.** $2 \in A$ V F **c.** $\{2, 3\} \in A$ V F

3. Dati gli insiemi $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 10\}$ e $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è divisore di $10\}$, rappresenta per elencazione $C \cup D$, $C \cap D$ e $C - D$.

4. Dati gli insiemi $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, x \geq 5\}$, determina per elencazione $(C - B) \cup A$.

5. Se $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola gelato$\}$ e $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola gola$\}$, sono vere o false le seguenti relazioni di appartenenza?

a. $(o, g) \in A \times B$ V F **c.** $(t, a) \in B \times A$ V F

b. $(o, g) \in B \times A$ V F **d.** $(t, a) \in A \times B$ V F

6. Dati gli insiemi $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, \{2\}\}$, scrivi per elencazione $A \times B$.

7. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{1, 2\}$, sono vere o false le seguenti relazioni?

a. $A \subset B$ V F **c.** $C \subset A$ V F **e.** $\varnothing \subseteq B$ V F

b. $B \subset A$ V F **d.** $B \subset C$ V F **f.** $A \subset A$ V F

8. Sia $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è divisore di 6 maggiore di $1\}$. Rappresenta per elencazione $P(A)$.

9. Dato l'insieme $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$, sono vere o false le seguenti relazioni?

a. $\{1, 2\} \in A$ V F **c.** $\{1, 2\} \subset P(A)$ V F

b. $\{1, 2\} \in P(A)$ V F **d.** $\{3, 4\} \in A$ V F

10. Siano $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è divisore di $10\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ è multiplo di 2 minore di $10\}$. Rappresenta per elencazione $C_U(A)$ e $C_U(B)$.

I contenuti di risolto! 1

Indice: