

costruire e valutare le  
**COMPETENZE  
MATEMATICHE**

**Roberto Trincherò, Professore Associato UNITO**

**QUALI  
FINALITÀ**

dovrebbe avere la

**FORMAZIONE  
SCOLASTICA?**

# Uno spunto dall'indagine Ocse-Pisa (e Invalsi)...



**ANDREAS SCHLEICHER**  
USE DATA TO BUILD BETTER SCHOOLS

“ Titoli di studio migliori non si traducono automaticamente in capacità migliori, lavori migliori e livelli di vita migliori. Con il Pisa cerchiamo di cambiare tutto questo [...] e abbiamo trovato un punto di vista molto particolare: **eravamo meno interessati alla capacità degli studenti di riprodurre quello che avevano imparato a scuola ma volevamo verificare se erano in grado di estrapolare da quello che fanno e applicare la loro conoscenza in situazioni diverse [...]** e qualcuno dice che è ingiusto perché **esaminiamo gli studenti con problemi che non hanno mai visto prima**. Ma se seguite quella logica dovete considerare ingiusta la vita stessa perché **l'esame della vita vera non è nella nostra capacità di ricordare quello che abbiamo imparato a scuola, ma se siamo preparati per il cambiamento, se siete preparati a lavori che non sono stati creati, a usare tecnologie che non sono state inventate, a risolvere problemi che non possiamo anticipare oggi.** ”

# Formare per competenze

Formare/valutare per  
conoscenze/abilità

Formare/valutare per  
competenze

Modo di  
interpretare  
i problemi  
★ **INTERPRE  
TAZIONE**

Problemi “chiusi”: vi è  
un solo modo di  
interpretarli

Problemi “aperti” a più  
interpretazioni

Modo di  
affrontarli  
★ **AZIONE**

Una procedura che  
porta a una soluzione  
univoca

Più strategie di  
soluzione

Modo di  
valutare  
la propria azione  
★ **RIFLESSIONE**

Feedback  
giusto/sbagliato

Riflessione sulle proprie  
strategie

# COS'È UNA COMPETENZA

- ★ 'Competenza' indica la comprovata capacità di **usare** conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, **in situazioni** di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale;
- ★ Le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.

# INDICATORI

dell'agire con competenza

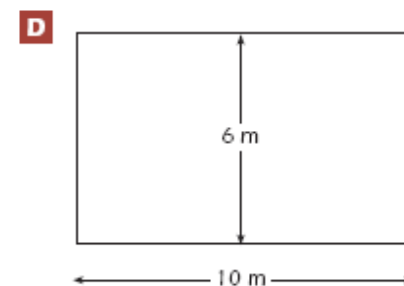
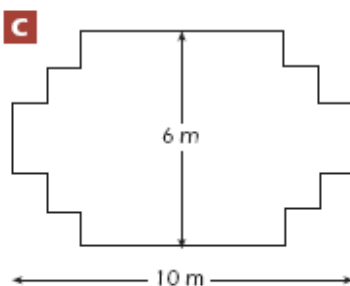
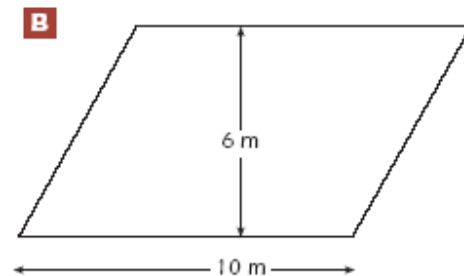
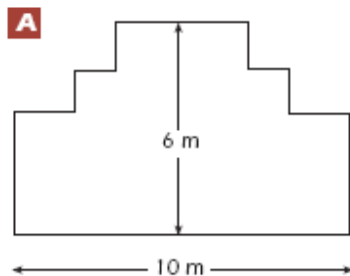
- ★ Risorse (conoscenze, capacità di base, atteggiamenti, ..., dell'allievo) (**R**)
- ★ Strutture di interpretazione (come l'allievo "legge" ed assegna significato alle situazioni) (**I**)
- ★ Strutture di azione (come l'allievo agisce in risposta ad un problema) (**Z**)
- ★ Strutture di autoregolazione (come l'allievo apprende dall'esperienza e cambia le proprie strategie in funzione delle sollecitazioni provenienti dal contesto) (**A**)

MOBILITAZIONE

# ESEMPIO problema del carpentiere

Un carpentiere ha 32 metri di tavole.

Quali di questi recinti può realizzare?



# ESEMPIO problema del carpentiere

## ★ **RISORSE**

Conoscere il concetto di somma e di perimetro  
Conoscere le proprietà dei triangoli  
Saper effettuare una somma, ...

## Strutture di ★ **INTERPRETAZIONE**

Saper cogliere il fatto che la soluzione del problema non sta nell'applicazione di un algoritmo, ma in un ripensamento delle figure

## Strutture di ★ **AZIONE**

Saper ricondurre una figura geometrica non conosciuta ad una conosciuta

## Strutture di ★ **AUTOREGOLAZIONE**

Saper valutare le proprie strategie confrontandole con gli obiettivi e con i dati a disposizione.



# IL PROFILO DI COMPETENZA

associato al problema del carpentiere

	allievo <b>ABILE</b>	allievo <b>COMPETENTE</b>
★ <b>RISORSE</b>	Conosce il concetto di somma e di perimetro, sa effettuare somme, ...	Conosce il concetto di somma e di perimetro, sa effettuare somme, ...
★ Strutture di <b>INTERPRETAZIONE</b>	Si chiede "Quando abbiamo trattato queste figure a scuola?"	Legge il problema come "Trasformare le figure irregolari in figure note"
★ Strutture di <b>AZIONE</b>	Cerca, senza successo, di applicare una formula risolutiva nota	Trasforma le figure irregolari in figure note
★ Strutture di <b>AUTOREGOLAZIONE</b>	Rinuncia a risolvere il problema ("non lo abbiamo trattato a scuola")	Se la trasformazione non porta ad una soluzione, cerca trasformazioni alternative.

# R-I-Z-A e livelli di certificazione delle competenze

★ **C**  
base

L'alunno/a svolge compiti semplici anche in situazioni nuove, mostrando di possedere conoscenze e abilità fondamentali e di saper applicare basilari regole e procedure apprese.

Risolve in modo autonomo problemi puramente esecutivi (che richiedono solo di applicare, non di scegliere), anche in situazioni non perfettamente analoghe a quelle didattiche.

Esecutore autonomo  
**Z**

★ **D**  
iniziale

L'alunno/a, se opportunamente guidato/a, svolge compiti semplici in situazioni note.

Risolve problemi puramente esecutivi (che richiedono solo di applicare, non di scegliere), solo se guidato, anche se in situazioni note.

Non autonomo

# R-I-Z-A e livelli di certificazione delle competenze

★ **A**  
avanzato

L'alunno/a svolge compiti e risolve problemi complessi, mostrando padronanza nell'uso delle conoscenze e delle abilità; propone e sostiene le proprie opinioni e assume in modo responsabile decisioni consapevoli.

Risolve in modo autonomo problemi che richiedono scelte molteplici e non banali (=originali, non convenzionali), in situazioni mai viste prima nella didattica. Sa argomentare efficacemente e consapevolmente le proprie scelte ed opinioni.

Competente con originalità e padronanza

**I-Z-A**

★ **B**  
intermedio

L'alunno/a svolge compiti e risolve problemi in situazioni nuove, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite.

Risolve in modo autonomo problemi che richiedono di scegliere le risorse da utilizzare nel bagaglio di quelle possedute, in situazioni mai viste prima in quella forma nella didattica.

Competente con originalità e padronanza

**I-Z**

# R-I-Z-A e formazione matematica

## ★ **RISORSE**

Acquisire informazione, sviluppare capacità di base e atteggiamenti verso il compito

## Strutture di ★ **INTERPRE TAZIONE**

Insegnare a leggere matematicamente la realtà e le realtà: cogliere, interpretare, decostruire

## Strutture di ★ **AZIONE**

Fornire strumenti matematici per avere un impatto sulla realtà: descrivere, spiegare, prevedere

## Strutture di ★ **AUTOREGO LAZIONE**

Mettere in grado di riflettere sulle proprie interpretazioni ed azioni: individuare punti di forza e punti di debolezza a cambiare le proprie strategie se e quando necessario

**PROGETTARE**  
per  
**COMPETENZE**

Possibili descrittori

## Strutture di **INTERPRETAZIONE** /

- ★ Cogliere... (elementi chiave, collegamenti e relazioni, ... )
- ★ Identificare... (dati e incognite, obiettivi, punti non chiari, ... )
- ★ Individuare... (elementi chiave, collegamenti e relazioni, risorse necessarie, ... )
- ★ Localizzare... (informazioni, concetti, ... )
- ★ Riconoscere... (situazioni problematiche, informazioni date e informazioni mancanti, ... )
- ★ Scegliere... (le risorse più opportune, ... )
- ★ Selezionare... (le risorse più opportune, ... )

# Possibili descrittori Strutture di **AZIONE**

- ★ Analizzare... (contenuti, processi, ... )
- ★ Attribuire... (punti di vista, posizioni di autori differenti, ... )
- ★ Calcolare... (applicando algoritmi, ...)
- ★ Classificare... (contenuti, processi, soluzioni, ... )
- ★ Confrontare... (contenuti, processi, soluzioni, strategie, ...)
- ★ Costruire... (prodotti, ... )
- ★ Descrivere... (oggetti, processi, soluzioni, ... )
- ★ Dimostrare... (soluzioni, ... )
- ★ Eseguire... (procedure, ... )
- ★ Formulare... (piani di azione, strategie, soluzioni, ... )
- ★ Ideare... (soluzioni, strategie, ... )
- ★ Ipotesizzare... (soluzioni, strategie, ... )
- ★ Organizzare... (contenuti, processi, eventi, ... )
- ★ Pianificare... (sequenze di azioni, processi, strategie, ... )

- ★ Produrre ... (prodotti, ... )
- ★ Progettare ... (soluzioni, strategie, ... )
- ★ Rappresentare graficamente ... (contenuti, processi, problemi, soluzioni, strategie, ... )
- ★ Realizzare ... (prodotti, elaborati, ... )
- ★ Riassumere ... (contenuti, processi, ... )
- ★ Ricavare ... (implicazioni, conclusioni, sintesi, ... )
- ★ Riformulare ... (problemi, soluzioni, strategie, ... )
- ★ Spiegare ... (fenomeni, processi, ... )
- ★ Tradurre da un formalismo ad un altro ... (contenuti, processi, ... )
- ★ Trovare esempi di ... (contenuti, processi, ... )
- ★ Trovare similarità e differenze in ... (contenuti, processi, ... )
- ★ Utilizzare un modello per ... (risolvere un problema, ... )
- ★ Utilizzare una procedura per ... (risolvere un problema, ... )

Possibili descrittori  
Strutture di

**AZIONE**



# Possibili descrittori

## Strutture di **AUTOREGOLAZIONE**

- ★ Argomentare ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Chiarificare ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Criticare ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Difendere ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Giudicare ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Giustificare ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Motivare ... (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)
- ★ Trovare errori ... (nelle proprie proposte, nelle proprie soluzioni, nelle strategie applicate nella risoluzione di un problema, ...)

e i contenuti dove sono?

## le **RISORSE**

Nelle parentesi. Sono le rappresentazioni mentali (conoscenza fattuale, concettuale, procedurale, metacognitiva) su cui si applicano i vari processi mentali definiti dai verbi elencati.

**Classificare...** (oggetti, concetti, procedure, saperi...)

**Processo cognitivo**

**Contenuti**

**INSEGNARE**  
per  
**COMPETENZE**

# Partire da problemi del mondo reale dello studente

## **Avete due schede telefoniche:**

quella dell'operatore **Megafone** vi offre telefonate verso tutti gli altri operatori a 15 centesimi di scatto alla risposta e 9 centesimi al minuto per la conversazione.

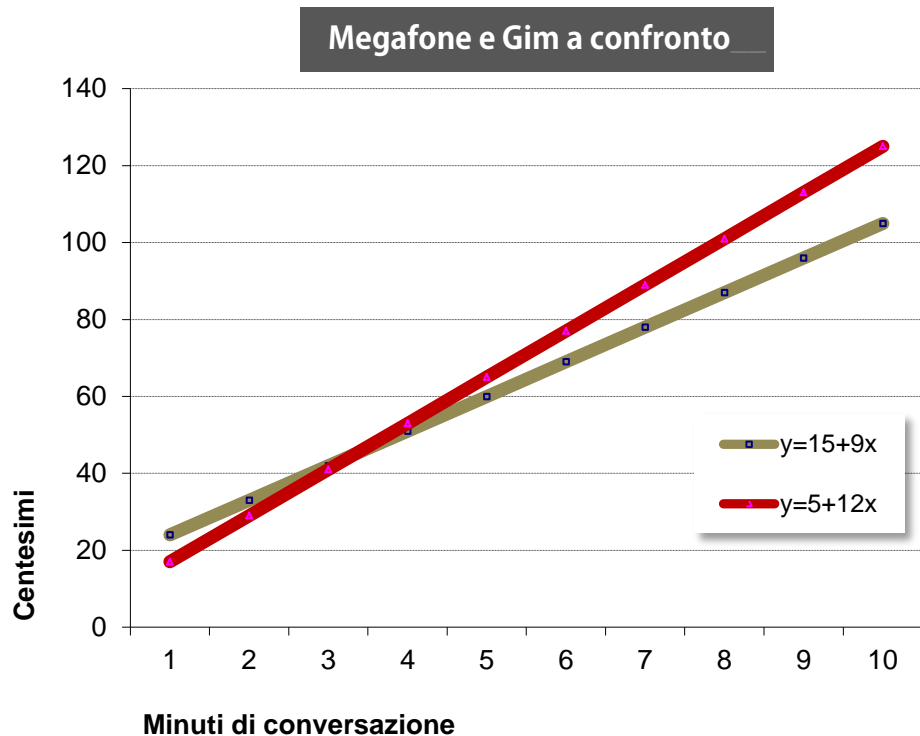
quella dell'operatore **Gim**, per telefonate verso tutti gli altri operatori, vi offre uno scatto alla risposta di 5 centesimi e 12 centesimi al minuto per la conversazione.

## **Con quale scheda vi conviene fare telefonate della seguente durata:**

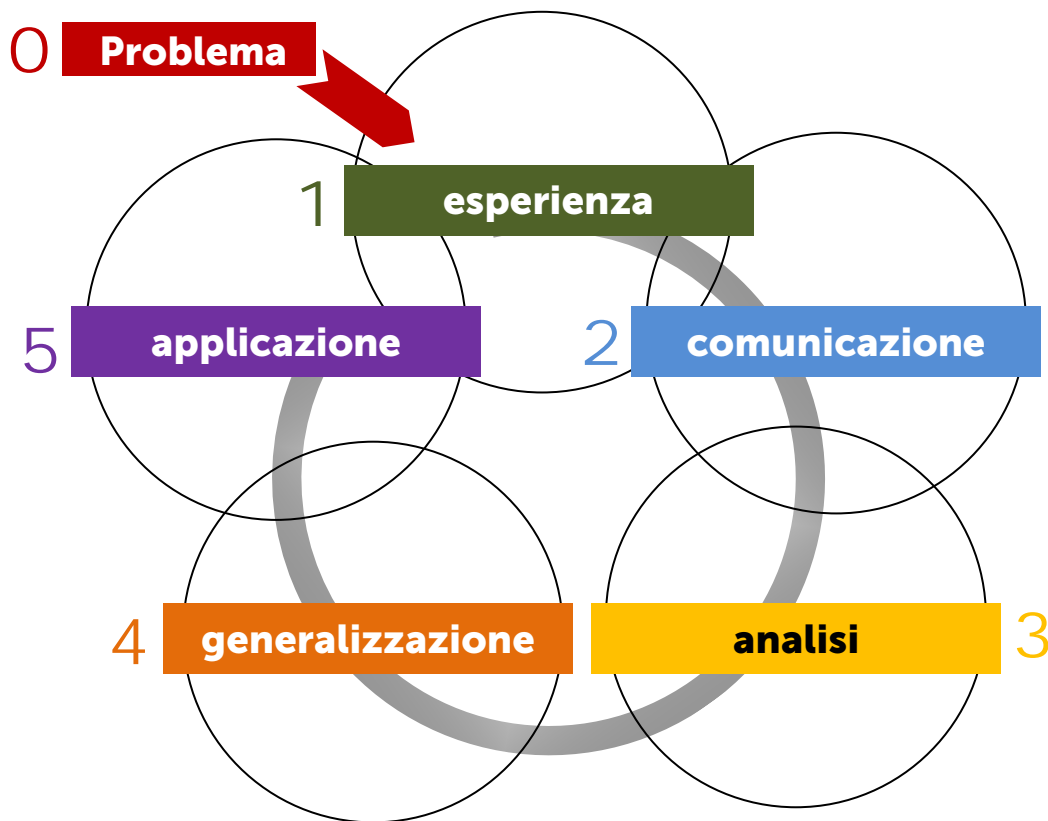
- ★ 1 minuto
- ★ 2 minuti
- ★ 3 minuti
- ★ 4 minuti
- ★ 5 minuti

# Tariffe cellulari

minuti	MEGAFONE	GIM
1	24	17
2	33	29
3	42	41
4	51	53
5	60	65
6	69	77
7	78	89
8	87	101
9	96	113
10	105	125



# Ciclo di Apprendimento Esperienziale un esempio di applicazione in classe



- 0** Un problema aperto, sfidante, tratto dal mondo reale, proposto alla classe.
- 1** Gli studenti, da soli, a coppie (meglio) o gruppi di 3, "inventano" una soluzione sulla base delle loro conoscenze attuali. Le coppie sono formate in modo mirato dall'insegnante che sceglie il ragazzo che ha più difficoltà come relatore di coppia.
- 2** Il relatore della coppia racconta la soluzione inventata dalla coppia alla classe, in un tempo limitato, e spiega come ci sono arrivati.
- 3** L'insegnante e i compagni individuano i punti di forza e i punti di debolezza della soluzione trovata. L'insegnante li riassume alla lavagna in una tabella a due colonne: «buone soluzioni» e «soluzioni discutibili».
- 4** La classe (aiutata dal docente) cerca di trovare una (o più) soluzioni ottimali attingendo alle buone idee emerse. Il docente integra quanto emerso con una breve lezione frontale. Le buone soluzioni (ma soprattutto le regole da seguire per trovarla) vengono scritte su un cartellone che viene appeso in classe.
- 5** La classe applica la soluzione ottimale trovata alla risoluzione di un problema analogo ma che presenta un piccolo livello di difficoltà in più.

# Esempio

0

## **PROBLEMA**

Con quale scheda telefonica mi conviene fare telefonate della durata di...?

1

## **ESPERIENZA**

Gli allievi, organizzati in coppie «mirate», propongono soluzioni al problema. Comunicazione: A turno il relatore della coppia (scelto dal docente) racconta la soluzione proposta.

2

## **COMUNICAZIONE**

A turno il relatore della coppia (scelto dal docente) racconta la soluzione proposta.

3

## **ANALISI**

Quali sono le “buone idee” emerse? E quelle “meno buone”? Quali “buone idee” può suggerire l’insegnante?

4

## **GENERALIZZAZIONE**

Mettendo insieme tutte le “buone idee” emerse (e quelle che proporrà l’insegnante, se non ne sono emerse a sufficienza...) cerchiamo di costruire una soluzione comune e di formalizzarla.

5

## **APPLICAZIONE**

Con questa soluzione così costruita cercate di risolvere un problema analogo proposto dall’insegnante (es. costo di un viaggio).

**VALUTARE**  
per  
**COMPETENZE**



# Situazione problema

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con  $x$  i minuti di conversazione effettuati in un mese, con  $f(x)$  la spesa totale nel mese e con  $g(x)$  il costo medio al minuto:

- 1 Individua l'espressione analitica delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  e rappresentale graficamente; verifica che la funzione  $g(x)$  non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
- 2 Detto  $x_0$  il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina  $x_1$  tale che:  $g(x_1) = g(x_0)/2$ . Traccia il grafico della funzione che esprime  $x_1$  in funzione di  $x_0$  e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?  
Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse: [...] La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi  $x$  e  $y$ , e dalla retta di equazione  $x = 6$ ; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.
- 3 Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.  
L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.
- 4 Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione  $g(x)$  e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

# Profilo di competenza

## Strutture di **INTERPRETAZIONE**

### Livello A – Avanzato

- ★ Individua i dati necessari a definire l'espressione analitica di  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- ★ Coglie la necessità di utilizzare il calcolo integrale per determinare l'area del territorio coperta dal segnale.
- ★ Coglie la necessità di utilizzare funzioni definite a tratti per rappresentare  $f(x)$  e  $g(x)$  con il cambiamento del piano tariffario.
- ★ Coglie il fatto che vi sono tratti delle funzioni che non hanno un corrispondente nella realtà.

### Livello I – Intermedio

- ★ Individua i dati necessari a definire l'espressione analitica di  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- ★ Coglie la necessità di utilizzare il calcolo integrale per determinare l'area del territorio coperta dal segnale.
- ★ Coglie la necessità di utilizzare funzioni definite a tratti per rappresentare  $f(x)$  e  $g(x)$  con il cambiamento del piano tariffario.

### Livello B – Base

- ★ Individua i dati necessari a definire l'espressione analitica di  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- ★ Coglie con difficoltà la necessità di utilizzare il calcolo integrale e le funzioni definite a tratti.

# Profilo di competenza

## Strutture di **AZIONE**

### Livello A – Avanzato

- ★ Formula in modo corretto le espressioni analitiche di  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- ★ Usa l'espressione analitica di  $g(x)$  per calcolare  $x_1$  in funzione di  $x_0$ .
- ★ Rappresenta graficamente  $x_1$  in funzione di  $x_0$ , descrive correttamente il suo andamento e il significato dell'asintoto verticale.
- ★ Formula in modo corretto la funzione polinomiale di secondo grado che rappresenta il margine superiore della zona e dimostra correttamente che nella zona rappresentata nella mappa il segnale copre il 96% del territorio.
- ★ Descrive correttamente i cambiamenti di  $f(x)$  e  $g(x)$  con il cambiamento del piano tariffario e le conseguenze nella situazione concreta.

### Livello I – Intermedio

- ★ Formula in modo corretto le espressioni analitiche di  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- ★ Usa l'espressione analitica di  $g(x)$  per calcolare  $x_1$  in funzione di  $x_0$ .
- ★ Rappresenta in modo sostanzialmente corretto  $x_1$  in funzione di  $x_0$ , descrive in modo sostanzialmente corretto il suo andamento e il significato dell'asintoto verticale.
- ★ Formula in modo corretto la funzione polinomiale di secondo grado che rappresenta il margine superiore della zona e dimostra in modo sostanzialmente corretto che nella zona rappresentata nella mappa il segnale copre il 96% del territorio.
- ★ Descrive in modo sostanzialmente corretto i cambiamenti di  $f(x)$  e  $g(x)$  con il cambiamento del piano tariffario.

### Livello B – Base

- ★ Formula in modo sostanzialmente corretto le espressioni analitiche di  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- ★ Usa in modo sostanzialmente corretto l'espressione analitica di  $g(x)$  per calcolare  $x_1$  in funzione di  $x_0$ .
- ★ Rappresenta in modo sostanzialmente corretto  $x_1$  in funzione di  $x_0$ , descrive in modo sostanzialmente corretto il suo andamento e il significato dell'asintoto verticale.
- ★ Formula in modo sostanzialmente corretto la funzione polinomiale di secondo grado che rappresenta il margine superiore della zona.

# Profilo di competenza

## Strutture di **AUTOREGOLAZIONE**

### **Livello A – Avanzato**

- ★ Giustifica le scelte fatte nel selezionare i dati necessari, nel definire le funzioni e nell'utilizzarle per rispondere alle consegne, motivandole in modo opportuno.
- ★ Autovaluta in modo corretto la sua prestazione sulla base degli spunti autovalutativi che gli vengono forniti in sede di valutazione della stessa.

### **Livello I – Intermedio**

- ★ Giustifica con qualche difficoltà le scelte fatte nel rispondere alle consegne.

### **Livello B – Base**

- ★ Giustifica con notevoli difficoltà le scelte fatte nel rispondere alle consegne.

# KIT DI LAVORO




Trinchero Roberto (2017)  
**Costruire e certificare  
competenze con il curricolo  
verticale nel primo ciclo**  
Milano, Rizzoli Education



Trinchero Roberto (2017)  
**Costruire e certificare  
competenze con il curricolo  
verticale nel secondo ciclo**  
Milano, Rizzoli Education

# day MATE MATICA

**I**  **MATH**



**Rizzoli**  
EDUCATION