
MATE live
SCIENZE
672 – 122
16
∫ₐᵇ ax
√542
Φ
-64x-54y
16(x-2)²-9(y-3)²-144

MATE *live* SCIENZE

Una, nessuna, centomila soluzioni

Alice Lemmo
Università degli Studi dell'Aquila
PON-AIM (1849353-3)

Il gruppo

Antonella **Castellini**

Chiara **Giberti**

Alice **Lemmo**

Andrea **Maffia**

Cominciamo da un problema

Sandra è seduta nella sua automobile parcheggiata nel parcheggio di un centro commerciale. Mentre aspetta che il marito Carlo concluda i suoi acquisti, decide di ammazzare il tempo contando le ruote dei veicoli che vede parcheggiati. Nel parcheggio ci sono vetture a 4 ruote (automobili, …) e a 2 ruote (biciclette, motorini, …).

Quando Carlo torna in auto, Sandra si lamenta per il tanto tempo che ha aspettato dicendogli che è arrivata a contare fino a 100 ruote!

Il marito scusandosi con la moglie le propone un gioco:

«Se riesco ad indovinare quanti veicoli c'erano nel parcheggio allora mi dovrai perdonare e portare fuori a cena, se invece non indovino dovrò offrirti la cena io».

- Accetteresti questa proposta se fossi in Sandra?
- Avresti fatto questa proposta se fossi in Carlo?

MATE live SCIENZE

Sentiamo la vostra opinione

Provateci voi!

https://forms.gle/JKUtobKDVnwYppLp8

MATE*live* SCIENZE

Che dire?

- Il contesto è ricco e molto articolato; l’aspetto narrativo ha un certo peso.
- Le domande non chiedono quante vetture a 4 o a 2 ruote ci fossero ma aprono una discussione sulla “convenienza della scommessa”.
- Questo comporta la discussione non tanto su possibili soluzioni in sé per sé, ma quanto sulla possibilità di trovarle, sulle strategie da utilizzare, sulla loro esistenza o meno, unicità o meno.
- In questo problema le incognite sono due: il numero di vetture a 4 ruote e quello delle vetture a 2 ruote; il problema non fornisce altra informazione su relazioni tra questi numeri ad eccezione della somma totale delle ruote.

Cosa può fare l’insegnante?

Invitare gli studenti a discutere

- sul problema
- sulle domande poste e su come poter rispondere,
- quali criteri possono essere interessanti per discriminare la “convenienza o meno” della scommessa

“[...] l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture per la costruzione delle conoscenze personali e collettive.” (MIUR, 2012, p. 50)

MATE live SCIENZE

Quello che conta è il Perché

Proviamo a condividere le strategie che avete usato per aprire una discussione.

Fotografate, scrivete su padlet!

https://padlet.com/alicelemmo1/Bookmarks

MATE*live* SCIENZE

Una tabella per guidare l’approccio per tentativi

Numero di vetture a 4 ruote	Numero di vetture a 2 ruote	Totale di vetture
1		
2		
3		
4		

L’insegnante potrebbe stimolare le discussioni chiedendo, ad esempio, di completare una tabella precompilata
Come riempire in modo “furbo” la tabella?

Come compilare la tabella?

Numero di vetture a 4 ruote	Numero di vetture a 2 ruote	Totale di vetture
1	1	$1 \times 4 + 1 \times 2 = 6 \neq 100$
2	3	$2 \times 4 + 3 \times 2 = 14 \neq 100$
3	10	$3 \times 4 + 10 \times 2 = 32 \neq 100$
4	40	$3 \times 4 + 40 \times 2 = 92 \neq 100$
4	44	$3 \times 4 + 44 \times 2 = 100$

MATE live SCIENZE

Quante coppie di soluzioni?

- Più coppie di numeri naturali soddisfano le richieste della situazione problematica
- Le abbiamo trovate tutte? Come possiamo esserne sicuri?

Dalla tabella alla generalizzazione

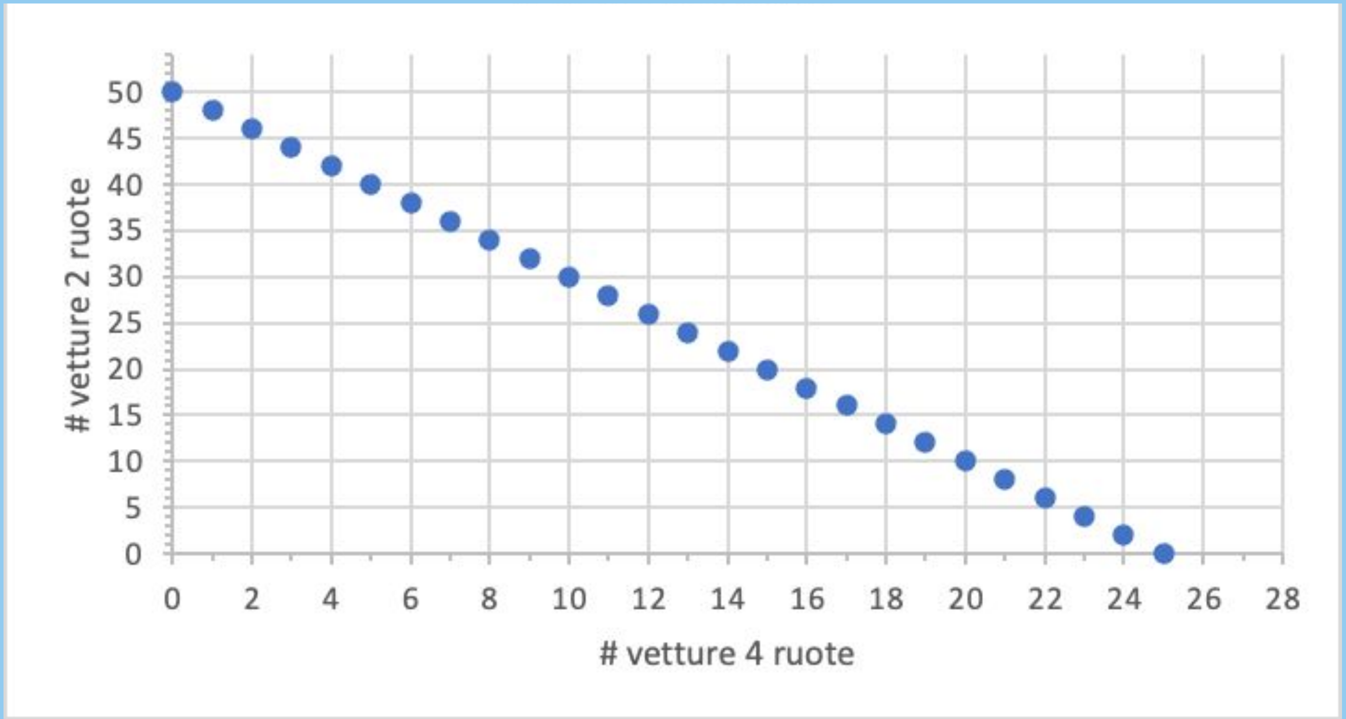
La generalizzazione potrebbe cominciare utilizzando un fogli di calcolo

	A	B	C
1	# vetture 4 ruote	#vetture 2 ruote	# ruote
2			=A2*4+B2*2
3			
4			
5			

MATE live SCIENZE

Pluralità di rappresentazioni

# vetture 4 ruote	#vetture 2 ruote	tot
0	50	100
1	48	100
2	46	100
3	44	100
4	42	100
5	40	100
6	38	100
7	36	100
8	34	100
9	32	100
10	30	100
11	28	100
12	26	100
13	24	100
14	22	100
15	20	100
16	18	100
17	16	100
18	14	100
19	12	100
20	10	100
21	8	100
22	6	100
23	4	100
24	2	100
25	0	100



MATE live SCIENZE

Costruire congetture

- Il numero di vetture a 4 ruote possibili è limitato?
- Il numero di vetture a 2 ruote possibili è limitato?
- Il numero di vetture a due ruote deve essere pari, perché?
- Si può semplificare il problema?

$$4x + 2y = 100$$

$$2x + y = 50$$

MATE*live*
SCIENZE

Dalla tabella alla generalizzazione

$$4x+2y=100$$

L'insegnante può condurre gli studenti a riflessioni sempre più generalizzate attraverso delle domande guidate a:

- **riconoscere** cosa nel procedimento varia e cosa rimane costante;
- **mantenere il significato dei vari elementi**: a cosa si riferisce il numero che deve essere messo nel primo quadratino? A cosa si riferisce il numero che deve essere messo nel secondo quadratino?
- **generalizzare la formula** indicando con x e y le variabili.

MATE*live* SCIENZE

Le soluzioni non sono semplicemente “tante”

- Generalizzare significa “sganciarsi” dalla realtà e lavorare strettamente in ambito matematico
- In questo caso, quante soluzioni ci sono?

MATE*live* SCIENZE

È necessario

- utilizzare la calcolatrice per accelerare i calcoli soprattutto quando si lavora per tentativi e si vuole stimolare la produzione di congetture;

- mantenere il significato di ciò che si sta facendo, soprattutto finché si lavora sulle soluzioni del problema proposto

- dare particolare rilievo alla decisione di sganciarsi dal contesto iniziale quando si ricercano soluzioni nell'insieme degli interi. Con tale scelta il problema si sgancia dalla realtà, diventa un problema numerico e le soluzioni diventano infinite;

La valutazione?

- Il processo di valutazione è complesso e articolato
- Tenere in considerazione diversi fattori: comunicazione, collaborazione, proposta di congetture, capacità di generalizzazione, ...
- Autovalutazione o valutazione tra pari
- Lavoro individuale

MATE *live* SCIENZE

Lavori in piccoli gruppi

- **Fase 1**
  Dividere la classe in gruppi di due alunni, far inventare un problema che sia risolvibile con una equazione Diofantea. Successivamente l'insegnante raccoglie testo e soluzione scritti su fogli separati e dà al gruppo A il testo formulato dal gruppo B e viceversa.

- **Fase 2**
  Ogni gruppo lavora sul problema ricevuto risolvendolo o sottolineando possibili errori o contraddizioni.

- **Fase 3**
  I gruppi A e B lavorano insieme e discutono entrambi i problemi sia come formulazione del testo che come procedura di soluzione.

MATE live SCIENZE

Lavoro individuale

Trova nell'insieme dei numeri razionali almeno 5 coppie di soluzioni per la seguente equazione:

$3x + 4y = 36$

Inoltre trova il valore della:

- y nel caso in cui la $x = 8$;
- y nel caso in cui la $x = 12$;
- x nel caso in cui la $y = 6$;
- x nel caso in cui la $y = 10$;
- y nel caso in cui la $x = 6$.

- Individua sul piano cartesiano i punti che hanno come coordinate le coppie di soluzioni trovate.

Lavoro individuale

Fornire alcune equazioni a coefficienti interi, alcune con soluzioni ed altre senza soluzioni intere e chiedere di:

- trovare se possibile almeno 5 soluzioni di ognuna;
- spiegare il metodo che è stato seguito;
- dare un tentativo di spiegazione del perché alcune non hanno soluzioni intere.

Quando uno studente lavora sulle equazioni il problema non deve essere solo focalizzato nel determinare il valore dell'incognita

Risolvere un’equazione significa anche

- Riflettere sull’insieme numerico in cui si cercano le soluzioni (ad esempio, naturali, interi, razionali, ….).
- Alcune equazioni che hanno soluzione in un insieme numerico non è detto che ce l’abbiano in tutti gli altri! Pensate ad esempio a $x^2+1=0$; $x+5=0$;…
- Il lavoro che abbiamo fatto insieme oggi introduce in modo naturale la necessità di limitarsi alle **soluzioni intere non negative**;
- Solo successivamente l'esempio può essere esteso anche alle ricerca delle soluzioni intere.

MATE*live* SCIENZE

Risolvere un’equazione significa anche

- Riflettere sulla possibilità di avere o meno una soluzione e, in caso essa esista, se è davvero **unica.**
- È una situazione in cui tipicamente non ci si trova con le solite equazioni di primo grado.

MATE*live* SCIENZE

Riferimento alle Indicazioni Nazionali 2012

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado:

- riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
- utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni…) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Numeri

- Individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri.
- Comprendere il significato e l'utilità del multiplo comune più piccolo e del divisore comune più grande, in matematica e in situazioni concrete.
- In casi semplici scomporre numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione per diversi fini.

Relazioni e funzioni

- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.
- Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.

MATE live SCIENZE

Uno sguardo in verticale

La scuola secondaria di I grado costituisce il momento di transito tra il primo e il secondo ciclo di istruzione.

Avere un approccio verticale al processo di insegnamento apprendimento non significa “anticipare” ma “preparare” al futuro

Quali punti su cui riflettere

- Lavorare sul passaggio di rappresentazioni:
  - linguaggio naturale
  - linguaggio aritmetico
  - algebrico
  - geometrico
  - …
- Abbiamo a che fare con una relazione numerica del tipo $ax+by=c$ (dove a, b, c sono numeri dati) La somiglianza con le equazioni conosciute è evidente ma diventa altrettanto evidente l'impossibilità di manipolarla attraverso algoritmi noti;

MATE live SCIENZE

Quali punti su cui riflettere

- il non conoscere/padroneggiare/gestire algoritmi risolutivi che permettano di determinare una soluzione fa emergere la necessità di **esplorare i numeri naturali e successivamente gli interi** per cercare eventuali soluzioni;
- gli allievi possono procedere per tentativi ed errori, cioè con un metodo intuitivo e molto naturale, che favorisce la produzione di congetture e al contempo un approccio significativo alla “formula” che si ottiene (cioè un'equazione di primo grado canonica).
- Le rappresentazioni su tabelle o su grafici forniscono agli allievi un utile strumento che supporta e stimola i loro ragionamenti e le loro congetture.

MATE live SCIENZE

Introduzione storica

L’ *Arithmetica* di Diofanto (III secolo d.C.)

Diofanto visse ad Alessandria d’Egitto, centro del pensiero scientifico del mondo ellenico.

Di tredici volumi dell’*Arithmetica*, solo sei sono giunti fino a noi.

Ebbe grande influenza sul pensiero algebrico arabo:

- Simbolismo matematico: uso sistematico delle lettere per abbreviare le incognite.
- Equazioni indeterminate: metodi generali per ottenere le soluzioni di vari tipi di equazioni.

Altri spunti: l’epitaffio di Diofanto

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἆ μέγα θαῦμα!
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
δωδεκάτην δ’ ἐπιθείς μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ’ ἄρ’ ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ’ ἐπένευσεν ἔτει.
Αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός
σοῦ γ’ ἐκάης δυεροῦ μέτρον ἑλὸν βιότου.
Πένθος δ’ αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ’ ἐπέρησε βίου.

Questa tomba contiene Diofanto e quanto fu il tempo della sua vita con arte mirabile ti illustra.
Giovinetto restò per un sesto, e perché si oscurasse di barba il mento, un altro dodicesimo dovette aspettare.
Dopo questo, un altro settimo trascorse prima che trovasse moglie, e nel quinto anno dell’unione nacque un bel bimbo.
Lo sfortunato erede visse solo la metà dell’età paterna; cadde di morte crudele e improvvisa.
Il padre lo pianse per i quattro anni che gli sopravvisse, prima di chiudere infine il conto dei suoi anni.

Le equazioni diofantee hanno sempre soluzione/i?

Teorema di Bezout. Se a, b sono interi e c è il loro massimo comun divisore, allora esistono interi *h*, *k* tali che:

$$ah + bk = c$$

MATE live SCIENZE

Grazie


MATE live
SCIENZE
672 – 122
16
√542
Φ
-64x-54y
16(x-2)²-9(y-3)²-144