MATE *live* SCIENZE

MATE live SCIENZE

I segreti di π

Luciana Ferri, Angela Matteo,
Eleonora Pellegrini

Un numero molto speciale

MATE live SCIENZE

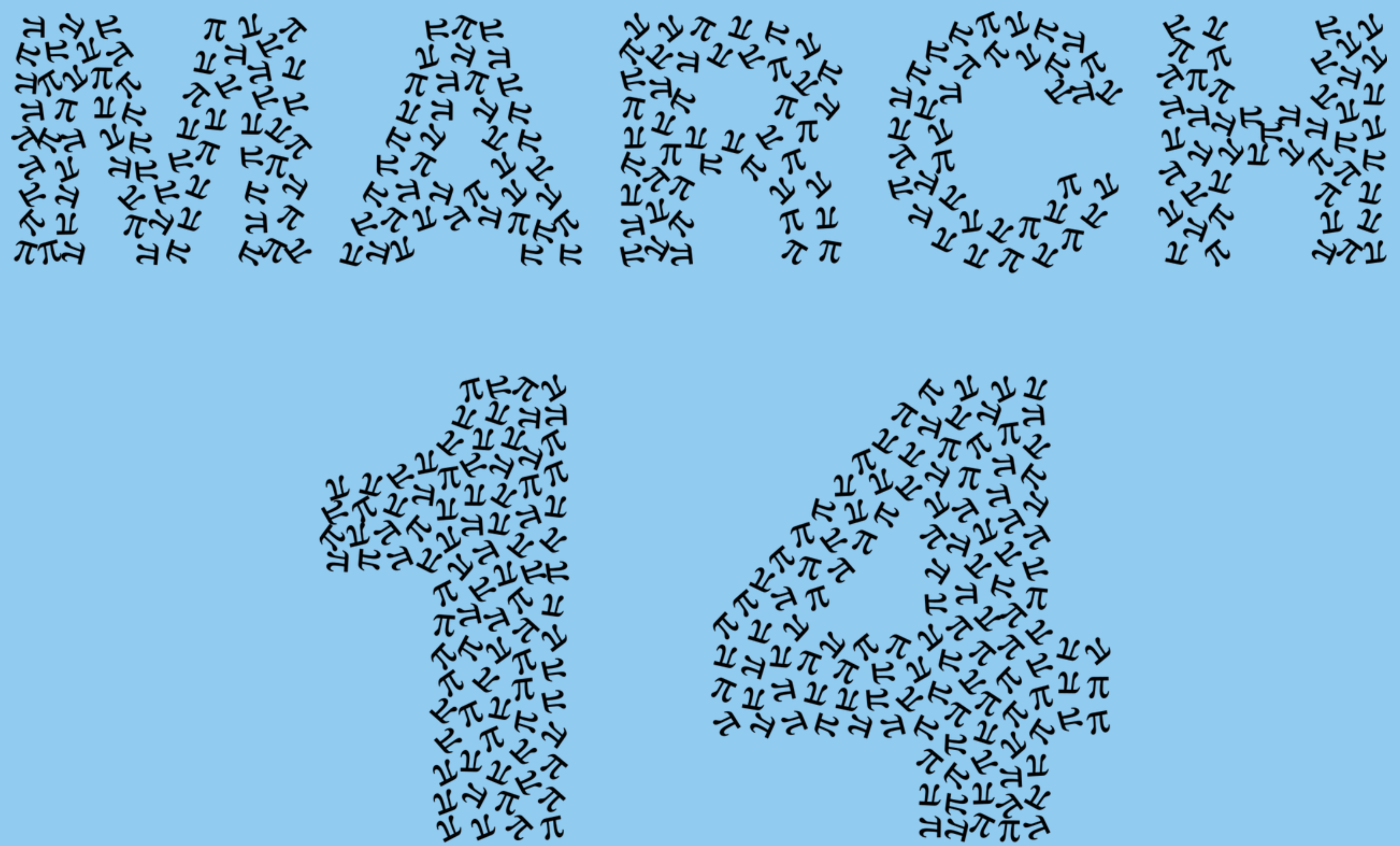
Occhio alla data

Nel mondo anglosassone la data del 14 marzo viene indicata nella forma

3.14

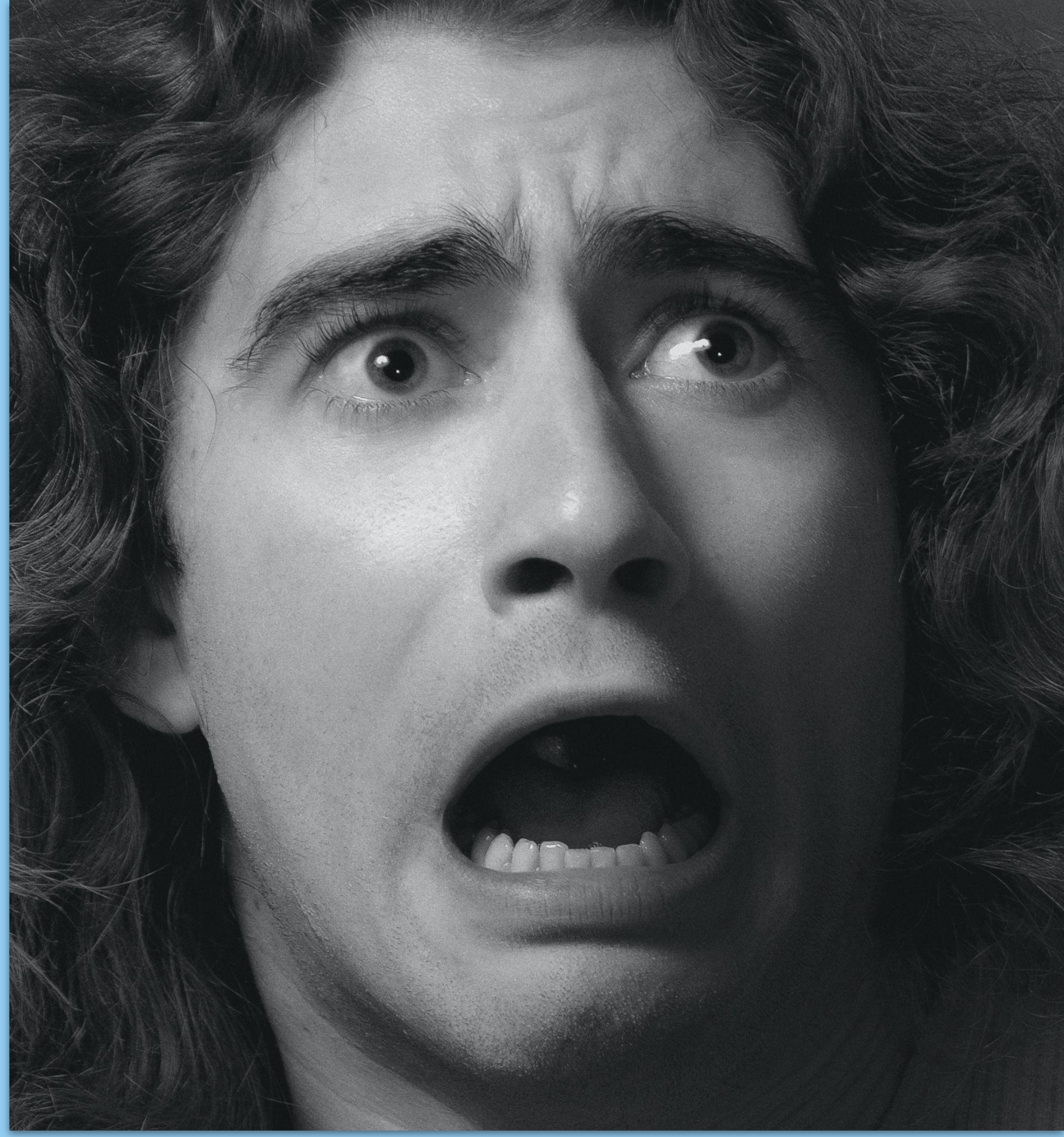
Questo numero corrisponde alla più nota approssimazione del pi greco (π), un numero molto importante per la matematica.

È per questo che da qualche anno il 14 marzo si festeggia il **π day**.



MATE live SCIENZE

Pazzi per π



Progetto di legge dell'Indiana sul pi greco è il nome con cui è conosciuto il progetto di legge № 246 del 1897 dell'Assemblea generale dell'Indiana, proposto dal matematico dilettante Edwin J. Goodwin.
Nonostante il nome, l'obiettivo principale del progetto era di **stabilire un metodo per quadrare il cerchio e di imporre un determinato valore per la costante matematica π**.

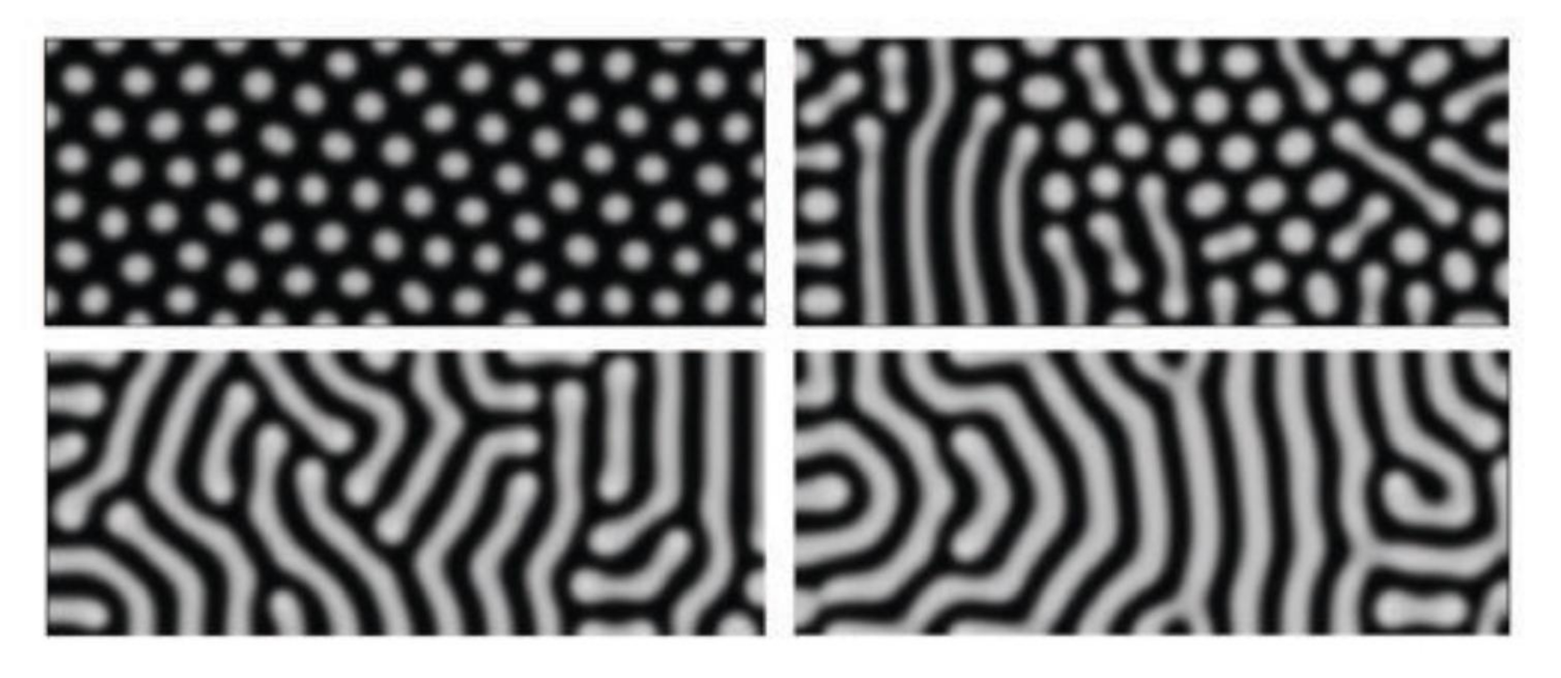
È un vero e proprio appuntato da record il carabiniere Luca Vadacca, in servizio presso la stazione di Isorella: ha infatti stabilito un **nuovo primato assoluto perché riesce a ricordare ben 6.000 cifre dopo la virgola di π**.

Nel 2001 il matematico statunitense Bob Palais pubblicò un articolo dal titolo “π is wrong!” ("il π è sbagliato!") in cui **propone un nuovo valore, il Tau (τ), da usare al posto di π**.

MATE live SCIENZE

Facciamo chiarezza

- π è definito come il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
- Sta alla base della scala dei radianti per la misura dell’ampiezza di un angolo.
- È legato a fenomeni fisici, biologici, probabilistici, …



La formazione delle strisce sul manto di una zebra può essere simulata con un algoritmo che dipende da π

Non solo π...

$$e$$

numero di Nepero

$$\Phi$$

numero aureo

$$i$$

numero immaginario

MATE *live* SCIENZE

Non solo π...

e

numero di Nepero

h

Φ

numero aureo

c

N_A

i

numero immaginario

MATE *live* SCIENZE

Non solo π...

h

Φ

numero aureo

e

numero di Nepero

c

N_A

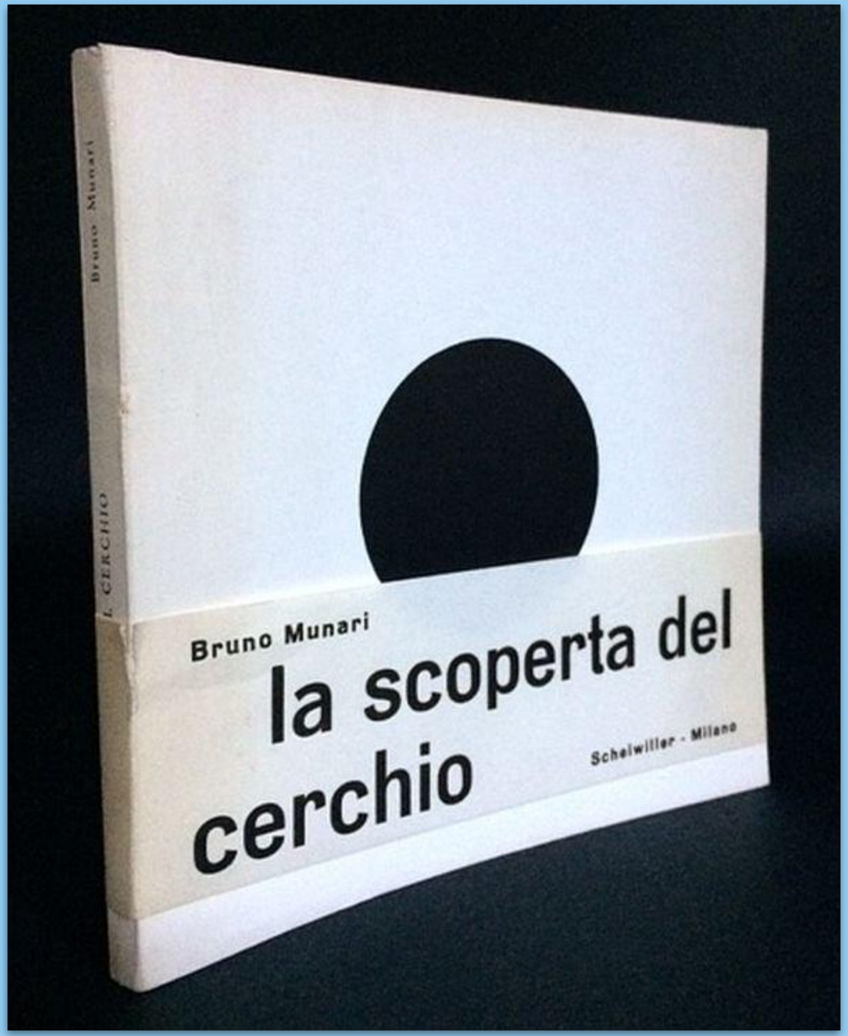
i

numero immaginario

... perché proprio π?

MATE*live* SCIENZE

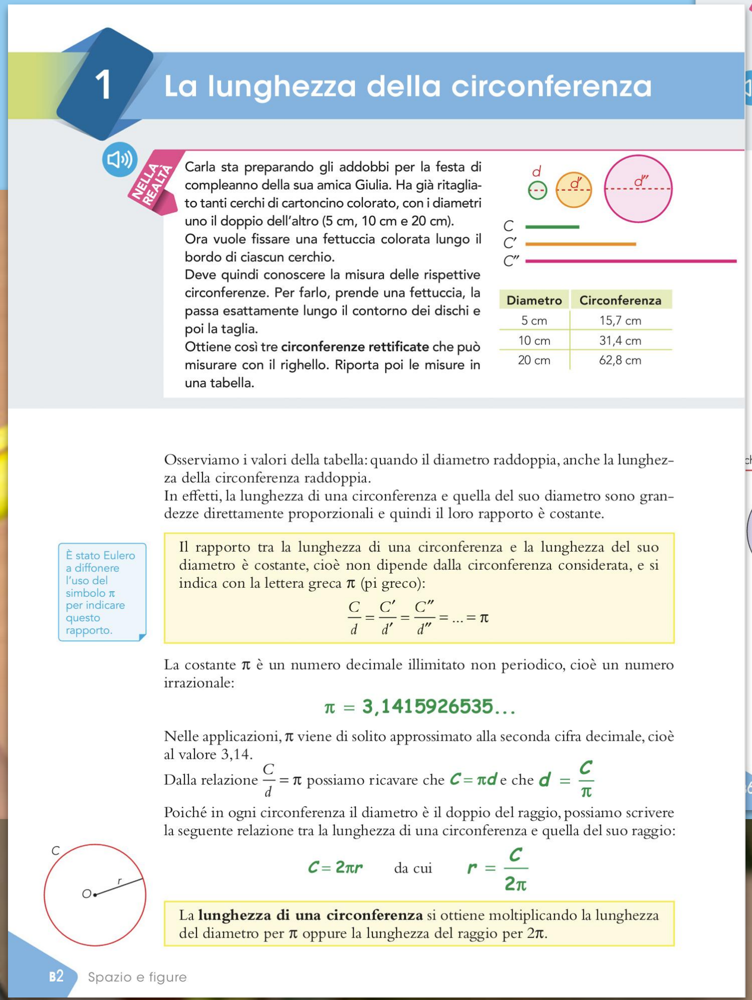
Perché proprio π?



Il cerchio è una figura che troviamo dappertutto

MATE live SCIENZE

Perché proprio π?



1 La lunghezza della circonferenza

NELLA REALTÀ

Carla sta preparando gli addobbi per la festa di compleanno della sua amica Giulia. Ha già ritagliato tanti cerchi di cartoncino colorato, con i diametri uno il doppio dell'altro (5 cm, 10 cm e 20 cm).
Ora vuole fissare una fettuccia colorata lungo il bordo di ciascun cerchio.
Deve quindi conoscere la misura delle rispettive circonferenze. Per farlo, prende una fettuccia, la passa esattamente lungo il contorno dei dischi e poi la taglia.
Ottiene così tre **circonferenze rettificate** che può misurare con il righello. Riporta poi le misure in una tabella.

Diametro	Circonferenza
5 cm	15,7 cm
10 cm	31,4 cm
20 cm	62,8 cm

Osserviamo i valori della tabella: quando il diametro raddoppia, anche la lunghezza della circonferenza raddoppia.
In effetti, la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro sono grandezze direttamente proporzionali e quindi il loro rapporto è costante.

È stato Eulero a diffonere l'uso del simbolo π per indicare questo rapporto.

Il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e la lunghezza del suo diametro è costante, cioè non dipende dalla circonferenza considerata, e si indica con la lettera greca π (pi greco):

$$\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'} = \frac{C''}{d''} = \ldots = \pi$$

La costante π è un numero decimale illimitato non periodico, cioè un numero irrazionale:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

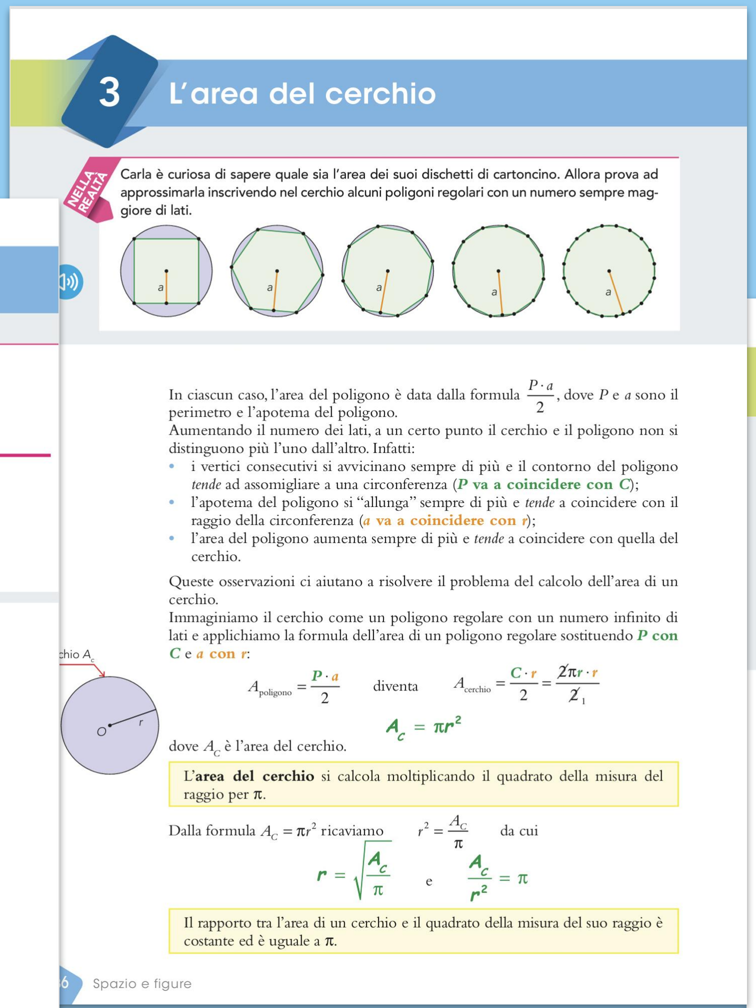
Nelle applicazioni, π viene di solito approssimato alla seconda cifra decimale, cioè al valore 3,14.
Dalla relazione $\frac{C}{d} = \pi$ possiamo ricavare che $C = \pi d$ e che $d = \frac{C}{\pi}$

Poiché in ogni circonferenza il diametro è il doppio del raggio, possiamo scrivere la seguente relazione tra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo raggio:

$$C = 2\pi r \quad \text{da cui} \quad r = \frac{C}{2\pi}$$

La **lunghezza di una circonferenza** si ottiene moltiplicando la lunghezza del diametro per π oppure la lunghezza del raggio per 2π.

B2 Spazio e figure



3 L'area del cerchio

NELLA REALTÀ

Carla è curiosa di sapere quale sia l'area dei suoi dischetti di cartoncino. Allora prova ad approssimarla inscrivendo nel cerchio alcuni poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati.

In ciascun caso, l'area del poligono è data dalla formula $\frac{P \cdot a}{2}$, dove P e a sono il perimetro e l'apotema del poligono.
Aumentando il numero dei lati, a un certo punto il cerchio e il poligono non si distinguono più l'uno dall'altro. Infatti:

- i vertici consecutivi si avvicinano sempre di più e il contorno del poligono *tende* ad assomigliare a una circonferenza (**P va a coincidere con C**);
- l'apotema del poligono si "allunga" sempre di più e *tende* a coincidere con il raggio della circonferenza (**a va a coincidere con r**);
- l'area del poligono aumenta sempre di più e *tende* a coincidere con quella del cerchio.

Queste osservazioni ci aiutano a risolvere il problema del calcolo dell'area di un cerchio.
Immaginiamo il cerchio come un poligono regolare con un numero infinito di lati e applichiamo la formula dell'area di un poligono regolare sostituendo **P con C** e **a con r**:

$$A_{poligono} = \frac{P \cdot a}{2} \quad \text{diventa} \quad A_{cerchio} = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{\cancel{2}\pi r \cdot r}{\cancel{2}_1}$$

$$A_c = \pi r^2$$

dove A_C è l'area del cerchio.

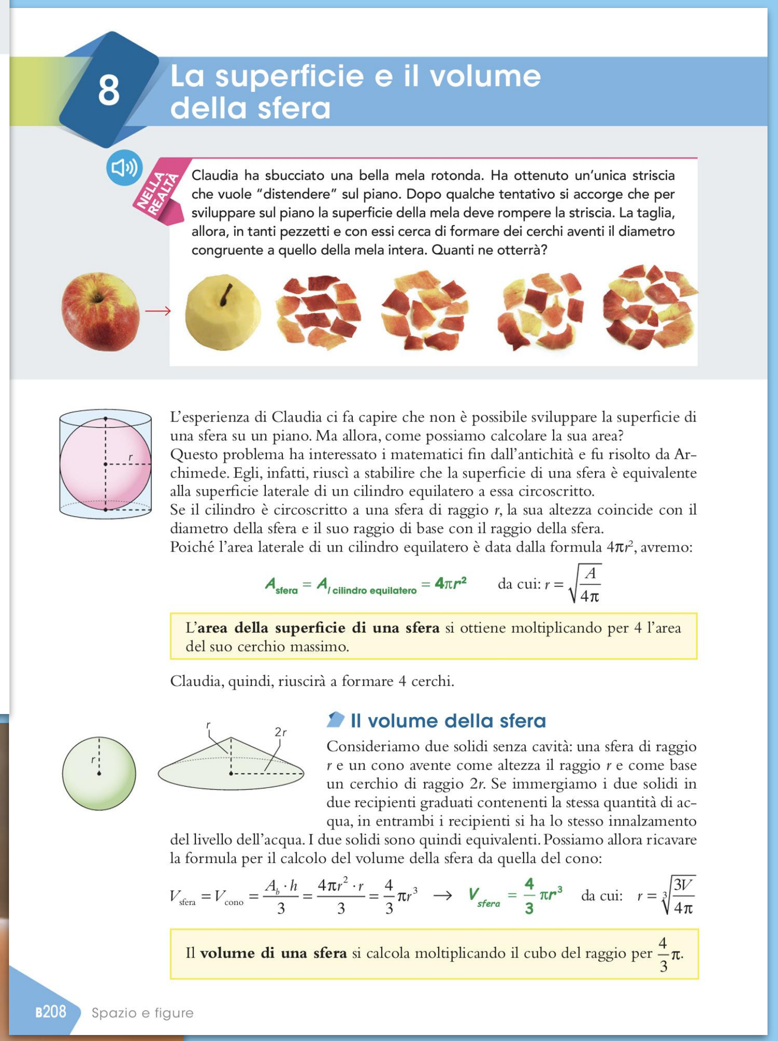
L'**area del cerchio** si calcola moltiplicando il quadrato della misura del raggio per π.

Dalla formula $A_C = \pi r^2$ ricaviamo $r^2 = \frac{A_C}{\pi}$ da cui

$$r = \sqrt{\frac{A_c}{\pi}} \quad \text{e} \quad \frac{A_c}{r^2} = \pi$$

Il rapporto tra l'area di un cerchio e il quadrato della misura del suo raggio è costante ed è uguale a π.

Spazio e figure



8 La superficie e il volume della sfera

NELLA REALTÀ

Claudia ha sbucciato una bella mela rotonda. Ha ottenuto un'unica striscia che vuole "distendere" sul piano. Dopo qualche tentativo si accorge che per sviluppare sul piano la superficie della mela deve rompere la striscia. La taglia, allora, in tanti pezzetti e con essi cerca di formare dei cerchi aventi il diametro congruente a quello della mela intera. Quanti ne otterrà?

L'esperienza di Claudia ci fa capire che non è possibile sviluppare la superficie di una sfera su un piano. Ma allora, come possiamo calcolare la sua area?
Questo problema ha interessato i matematici fin dall'antichità e fu risolto da Archimede. Egli, infatti, riuscì a stabilire che la superficie di una sfera è equivalente alla superficie laterale di un cilindro equilatero a essa circoscritto.
Se il cilindro è circoscritto a una sfera di raggio r, la sua altezza coincide con il diametro della sfera e il suo raggio di base con il raggio della sfera.
Poiché l'area laterale di un cilindro equilatero è data dalla formula $4\pi r^2$, avremo:

$$A_{sfera} = A_{l\ cilindro\ equilatero} = 4\pi r^2 \quad \text{da cui: } r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

L'**area della superficie di una sfera** si ottiene moltiplicando per 4 l'area del suo cerchio massimo.

Claudia, quindi, riuscirà a formare 4 cerchi.

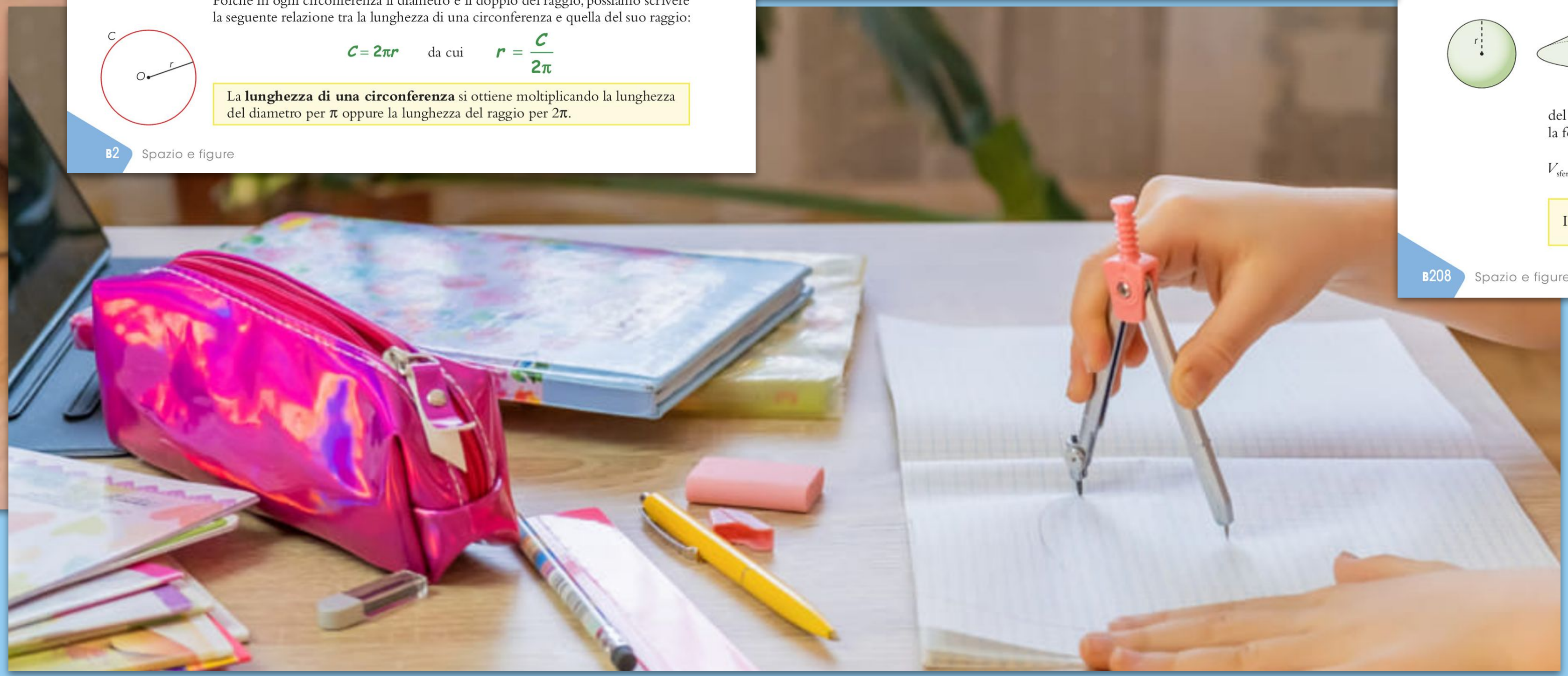
Il volume della sfera

Consideriamo due solidi senza cavità: una sfera di raggio r e un cono avente come altezza il raggio r e come base un cerchio di raggio $2r$. Se immergiamo i due solidi in due recipienti graduati contenenti la stessa quantità di acqua, in entrambi i recipienti si ha lo stesso innalzamento del livello dell'acqua. I due solidi sono quindi equivalenti. Possiamo allora ricavare la formula per il calcolo del volume della sfera da quella del cono:

$$V_{sfera} = V_{cono} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{da cui: } r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Il **volume di una sfera** si calcola moltiplicando il cubo del raggio per $\frac{4}{3}\pi$.

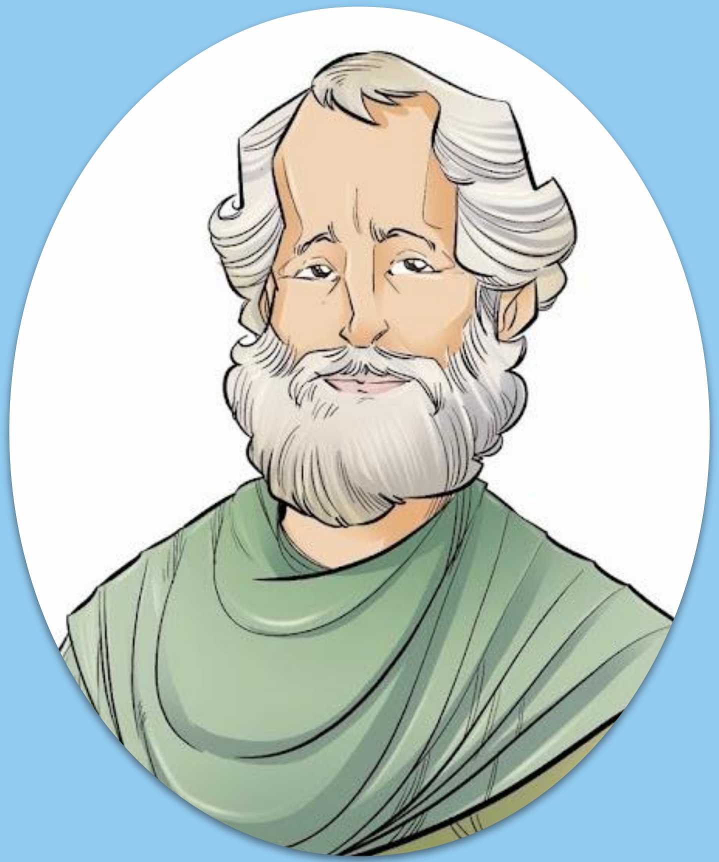
B208 Spazio e figure



Abbiamo a che fare con π fin dalla scuola primaria

MATE live SCIENZE

Perché proprio π?



Archimede
Metodo di esaustione

Lambert
Irrazionalità di π

Eulero
Formula di Eulero

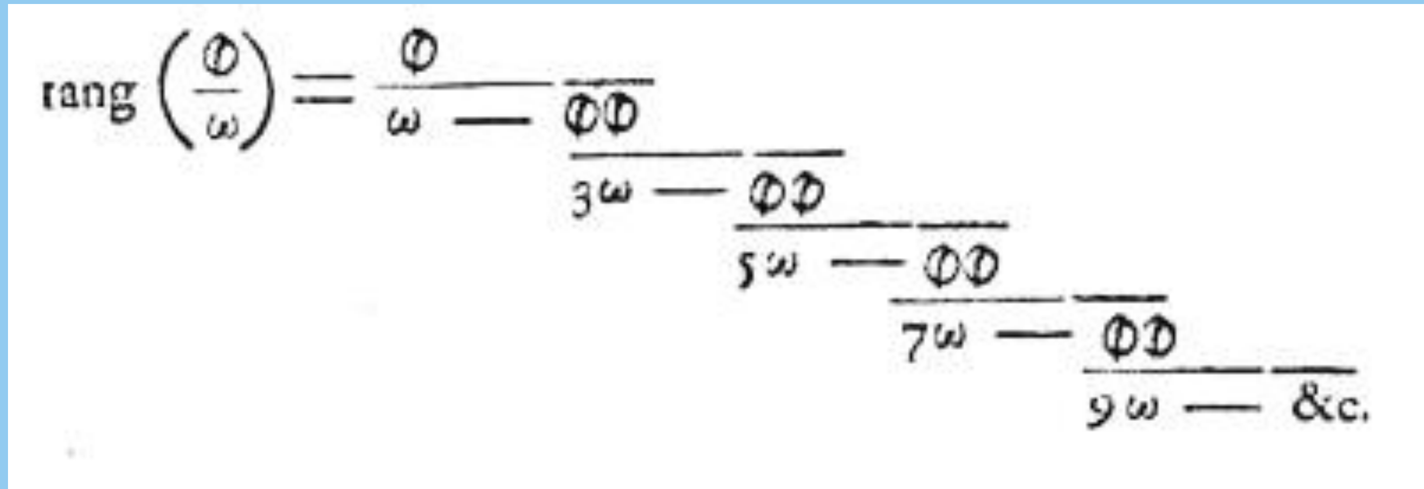
Ha appassionato i matematici fin dall'antichità

Stranezze di π
non è razionale

Johann Heinrich Lambert lo dimostra per primo, nel 1768

Idea della dimostrazione

- Lambert scrive la tangente di un numero x come frazione continua
- Grazie a questa scrittura, dimostra che se x è razionale non nullo, allora la tangente di x deve essere irrazionale.
- Infine osserva che la tangente di π/4 è uguale a 1, quindi π/4 non può essere razionale



$$\mathrm{tang}\left(\frac{\phi}{\omega}\right) = \cfrac{\phi}{\omega - \cfrac{\phi\phi}{3\omega - \cfrac{\phi\phi}{5\omega - \cfrac{\phi\phi}{7\omega - \cfrac{\phi\phi}{9\omega - \text{\&c.}}}}}}$$

Scansione della pubblicazione di Lambert

Di conseguenza **π non si può scrivere come rapporto di due numeri interi**

Stranezze di π

non è algebrico

Un numero si dice **algebrico** se esiste un polinomio con coefficienti razionali che ha quel numero come radice.

Nel 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann dimostra che π non è algebrico, quindi **π è trascendente**.

$$\sqrt{2} \text{ vs } \pi$$

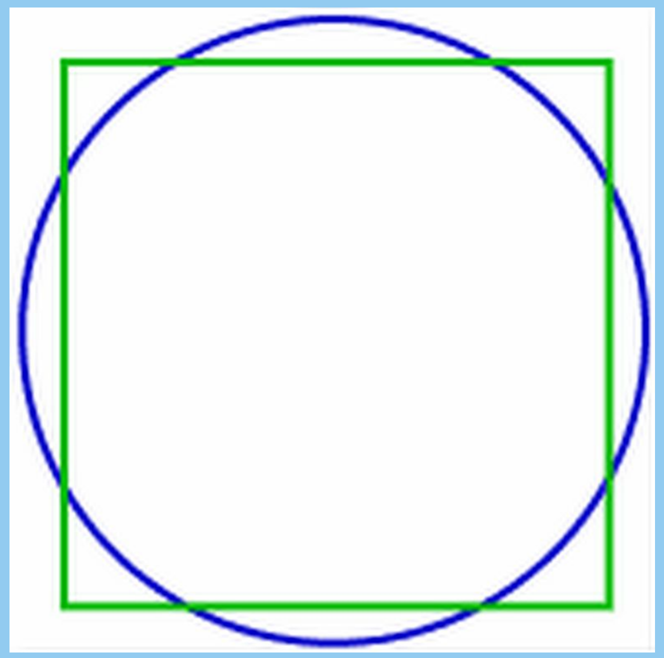
Radice di 2 non è razionale ma è algebrico

π non è né razionale né algebrico

MATE *live* SCIENZE

Stranezze di π

per colpa sua, niente quadratura del cerchio



Il problema della quadratura del cerchio

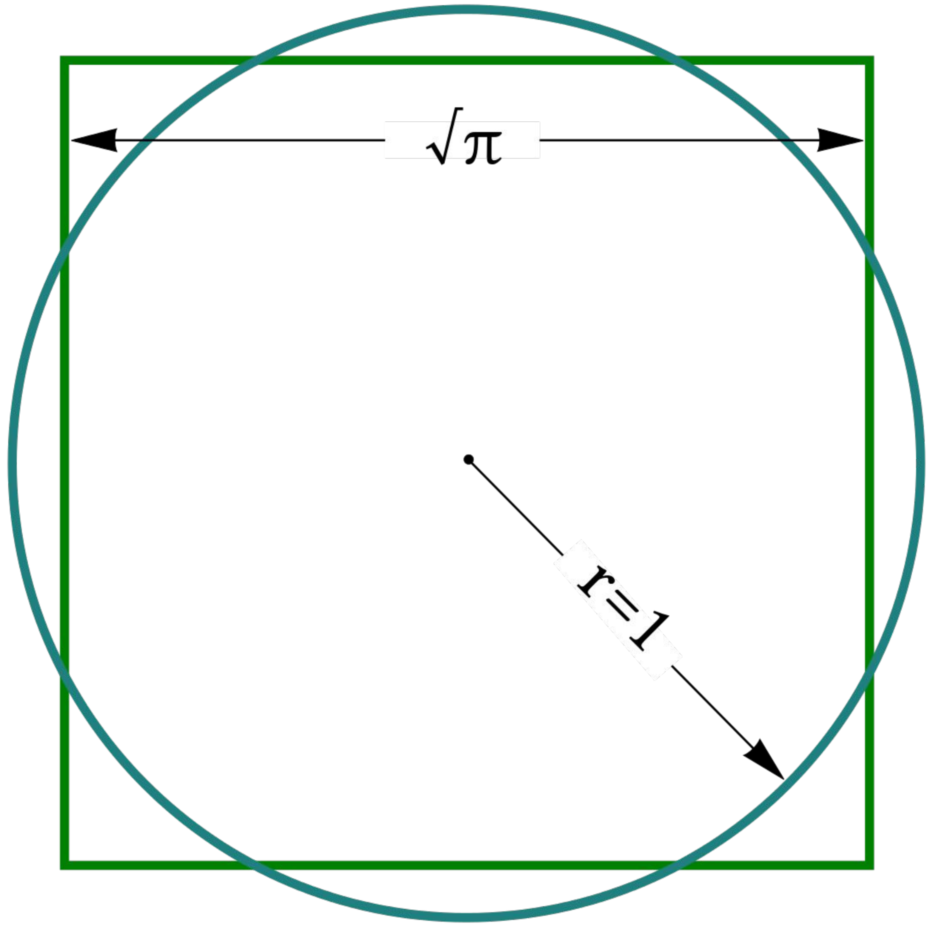
Dato un cerchio, è possibile costruire con riga e compasso un quadrato di uguale area?

Il primo a cimentarsi è **Anassagora**
V secolo a. C.

MATE*live* SCIENZE

Stranezze di π

per colpa sua, niente quadratura del cerchio



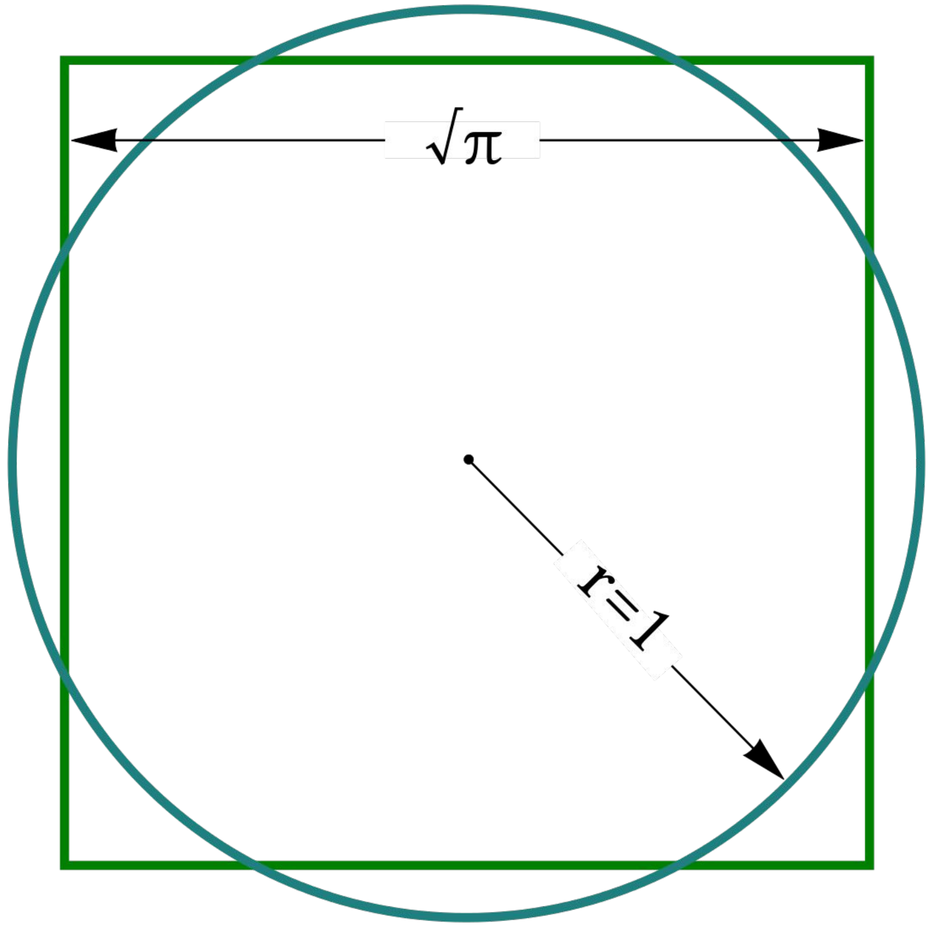
$$A = \pi r^2 = \pi \rightarrow l = \sqrt{\pi}$$

Il problema della quadratura del cerchio

Dato un cerchio, è possibile costruire con riga e compasso un quadrato di uguale area?

MATE live SCIENZE

Stranezze di π
per colpa sua, niente quadratura del cerchio



$$A = \pi r^2 = \pi \rightarrow l = \sqrt{\pi}$$

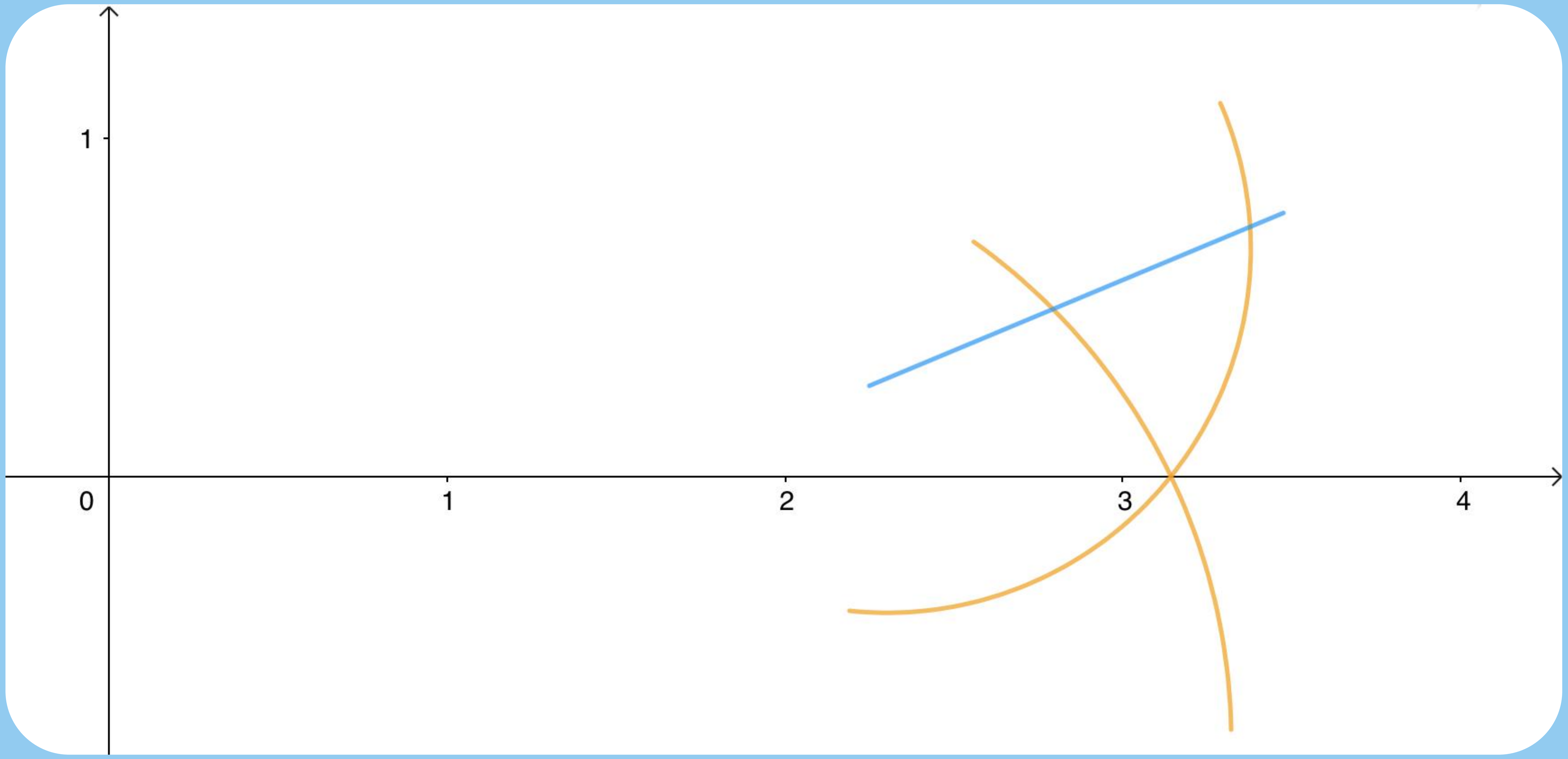
Il problema della quadratura del cerchio
Dato un cerchio, è possibile costruire **con riga e compasso** un quadrato di uguale area?

Equivale a costruire **con riga e compasso** un segmento di lunghezza π.

MATE*live* SCIENZE

Stranezze di π

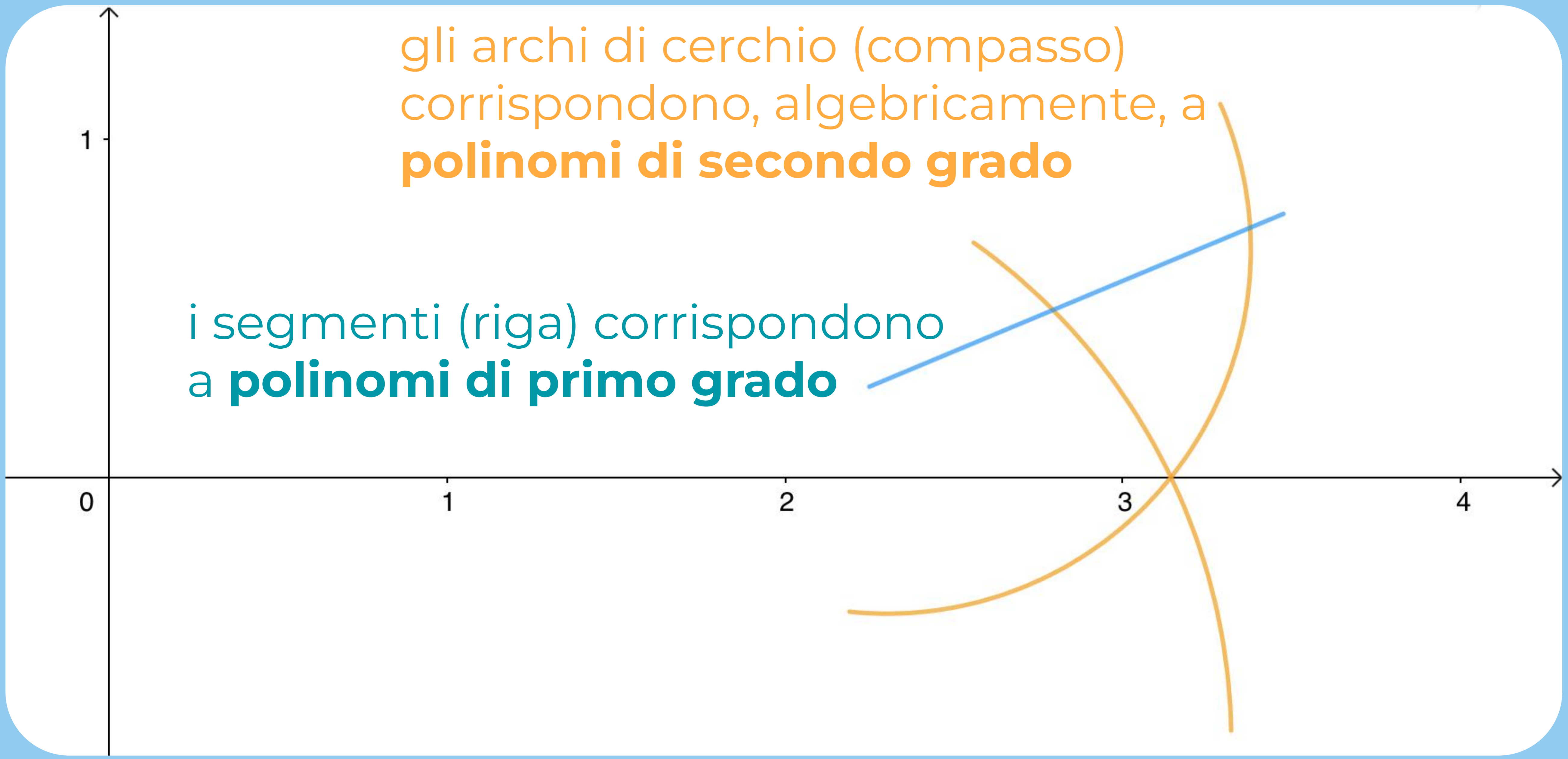
per colpa sua, niente quadratura del cerchio



MATE*live* SCIENZE

Stranezze di π

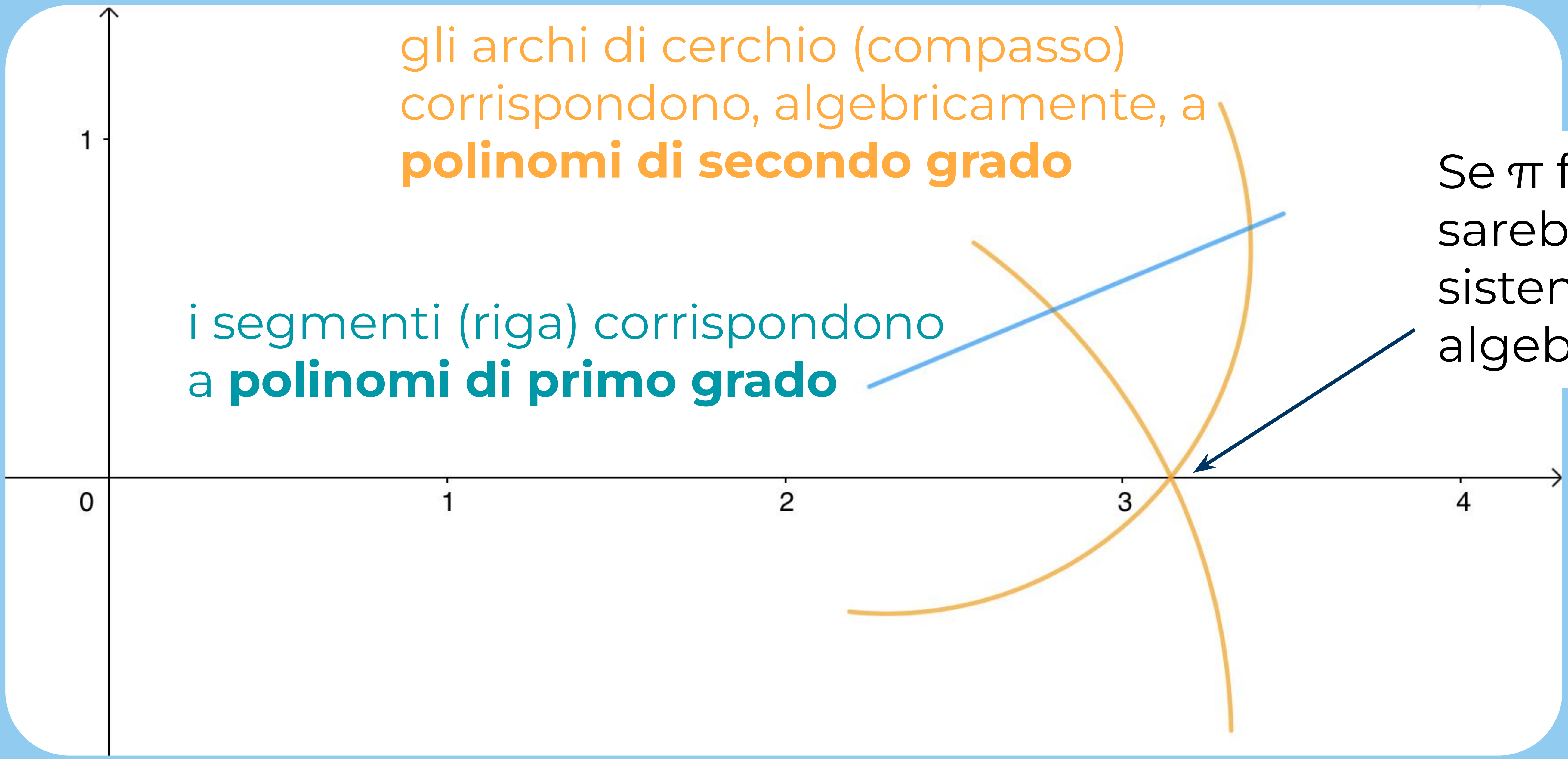
per colpa sua, niente quadratura del cerchio



MATE*live* SCIENZE

Stranezze di π

per colpa sua, niente quadratura del cerchio

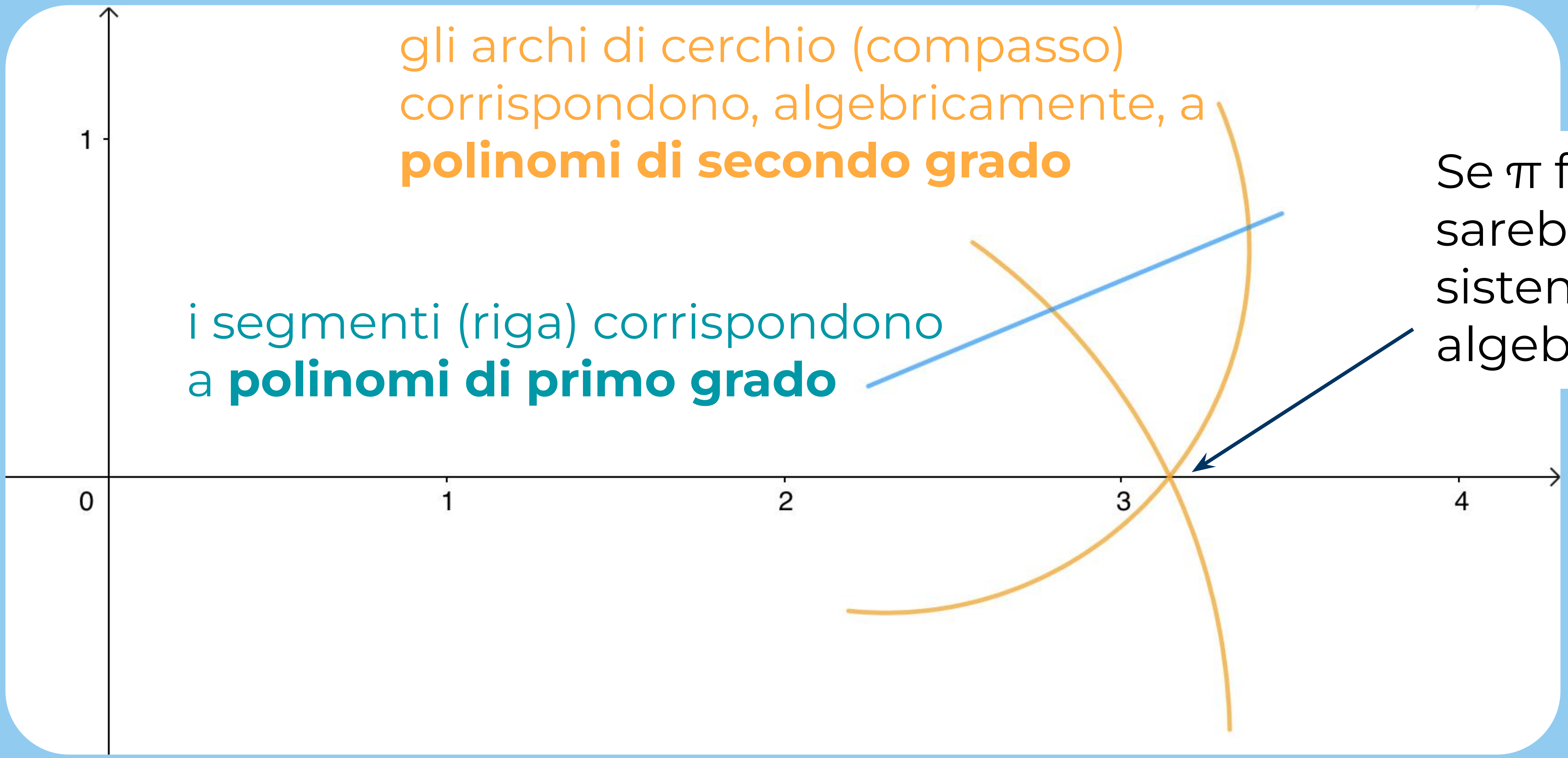


Se π fosse costruibile, sarebbe soluzione di un sistema polinomiale, cioè algebrico. Assurdo!

MATE live SCIENZE

Stranezze di π

per colpa sua, niente quadratura del cerchio



Se π fosse costruibile, sarebbe soluzione di un sistema polinomiale, cioè algebrico. Assurdo!

La trascendenza di π dimostra che il **problema della quadratura del cerchio** è **impossibile**.

Stranezze di π

la formula di Eulero

$$e^{i\pi} = -1$$

MATE*live* SCIENZE

Domande aperte

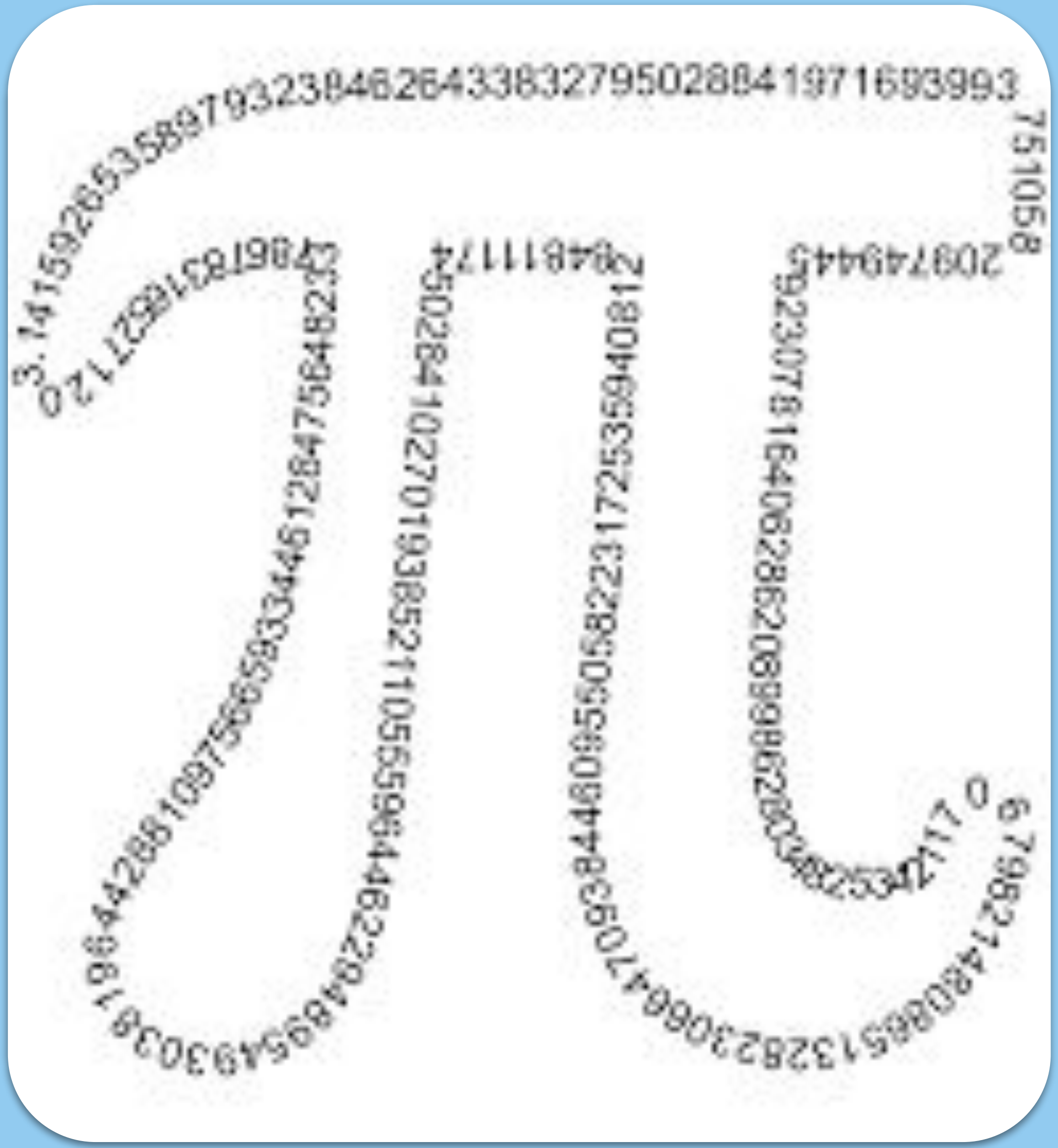
- Un numero è **normale** quando ogni sequenza di cifre decimali di una certa lunghezza compare con uguale probabilità. Non sappiamo se π è normale.

- Non si sa se sono razionali, irrazionali algebrici o trascendenti alcuni numeri che coinvolgono π, tra cui: $\pi + e$; π / e; πe; π^e

MATE live SCIENZE

π a scuola

MATE live SCIENZE



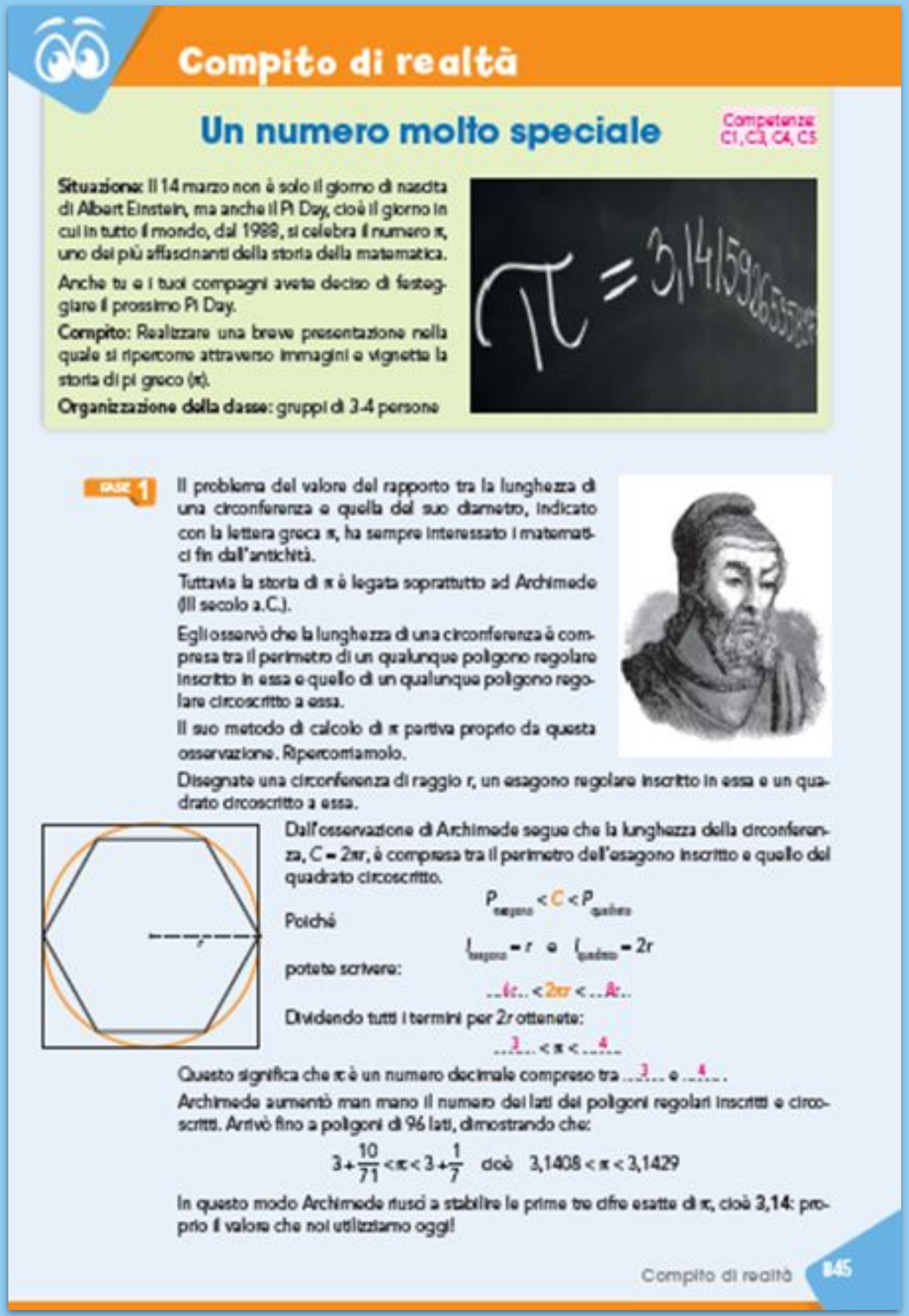
Perché lo utilizziamo
per calcolare
la misura della circonferenza
o l'area del cerchio?

Che tipo di
numero è?

Da quanto tempo
lo conosciamo?

MATE live
SCIENZE

Cosa fare?



Compito di realtà

Un numero molto speciale

Competenze C1, C3, C4, C5

Situazione: Il 14 marzo non è solo il giorno di nascita di Albert Einstein, ma anche il Pi Day, cioè il giorno in cui in tutto il mondo, dal 1988, si celebra il numero π, uno dei più affascinanti della storia della matematica.

Anche tu e i tuoi compagni avete deciso di festeggiare il prossimo Pi Day.

Compito: Realizzare una breve presentazione nella quale si ripercorre attraverso immagini e vignette la storia di pi greco (π).

Organizzazione della classe: gruppi di 3-4 persone

FASE 1

Il problema del valore del rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro, indicato con la lettera greca π, ha sempre interessato i matematici fin dall'antichità.

Tuttavia la storia di π è legata soprattutto ad Archimede (III secolo a.C.).

Egli osservò che la lunghezza di una circonferenza è compresa tra il perimetro di un qualunque poligono regolare inscritto in essa e quello di un qualunque poligono regolare circoscritto a essa.

Il suo metodo di calcolo di π partiva proprio da questa osservazione. Ripercorriamolo.

Disegnate una circonferenza di raggio r, un esagono regolare inscritto in essa e un quadrato circoscritto a essa.

Dall'osservazione di Archimede segue che la lunghezza della circonferenza, $C = 2\pi r$, è compresa tra il perimetro dell'esagono inscritto e quello del quadrato circoscritto.

$$P_{esagono} < C < P_{quadrato}$$

Poiché

$$l_{esagono} = r \quad e \quad l_{quadrato} = 2r$$

potete scrivere:

$$..6r.. < 2\pi r < ..8r..$$

Dividendo tutti i termini per $2r$ ottenete:

$$..3.. < \pi < ..4..$$

Questo significa che π è un numero decimale compreso tra ..3.. e ..4.. .

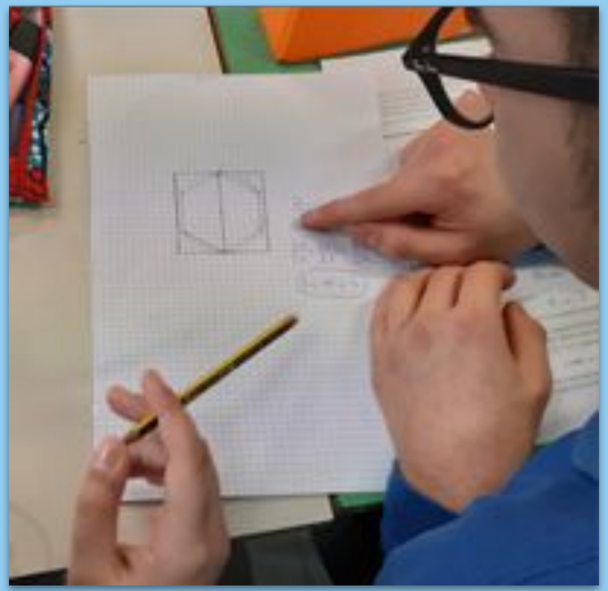
Archimede aumentò man mano il numero dei lati dei poligoni regolari inscritti e circoscritti. Arrivò fino a poligoni di 96 lati, dimostrando che:

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7} \quad \text{cioè} \quad 3,1408 < \pi < 3,1429$$

In questo modo Archimede riuscì a stabilire le prime tre cifre esatte di π, cioè **3,14**: proprio il valore che noi utilizziamo oggi!

Compito di realtà 845

… numero *pi greco* al centro delle attività degli alunni.



Un numero molto speciale

Situazione

Il **14 marzo** non è solo il giorno di nascita di Albert Einstein, ma anche il π day, cioè il giorno in cui in tutto il mondo, dal 1988, si celebra il numero π, uno dei più affascinanti della storia della matematica. Anche voi avete deciso di festeggiare il prossimo π day.

Compito

Preparare una lezione sul numero π da presentare al pubblico o da pubblicare sul sito della scuola

Organizzazione della classe

Gruppi di 2 o 3 persone

Fasi del lavoro

1. Alla scoperta di π: il rapporto tra circonferenza e diametro
2. π nella storia: dai babilonesi ad Archimede
3. Il metodo di esaustione
4. π nella storia: da Archimede ai supercalcolatori
5. Filastrocche su π

MATE live SCIENZE

Fase 1
Alla scoperta di π

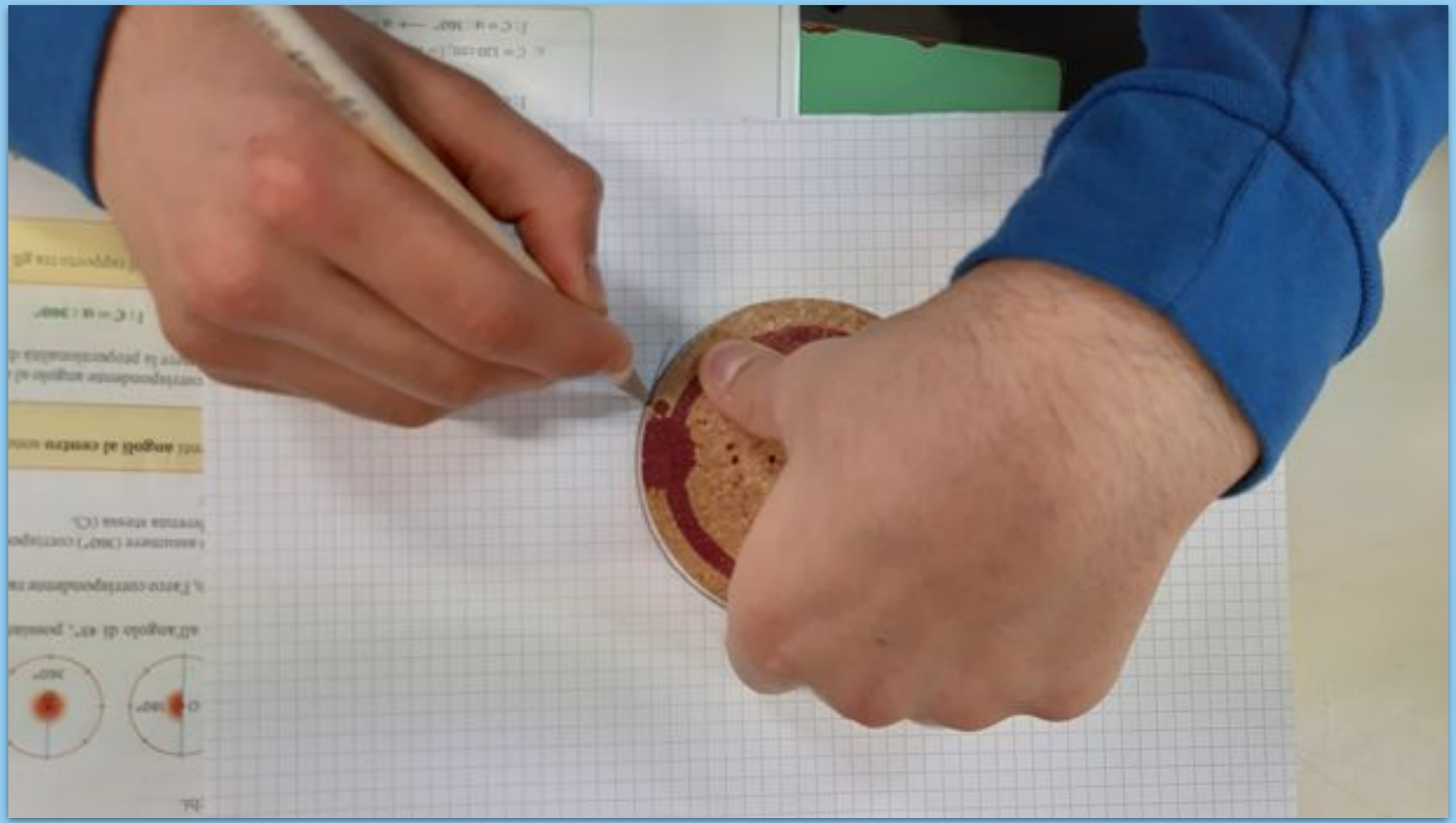
Materiale:

- Oggetti di uso comune di forma circolare
- Spago
- Forbici
- Strumenti per il disegno
- Calcolatrice

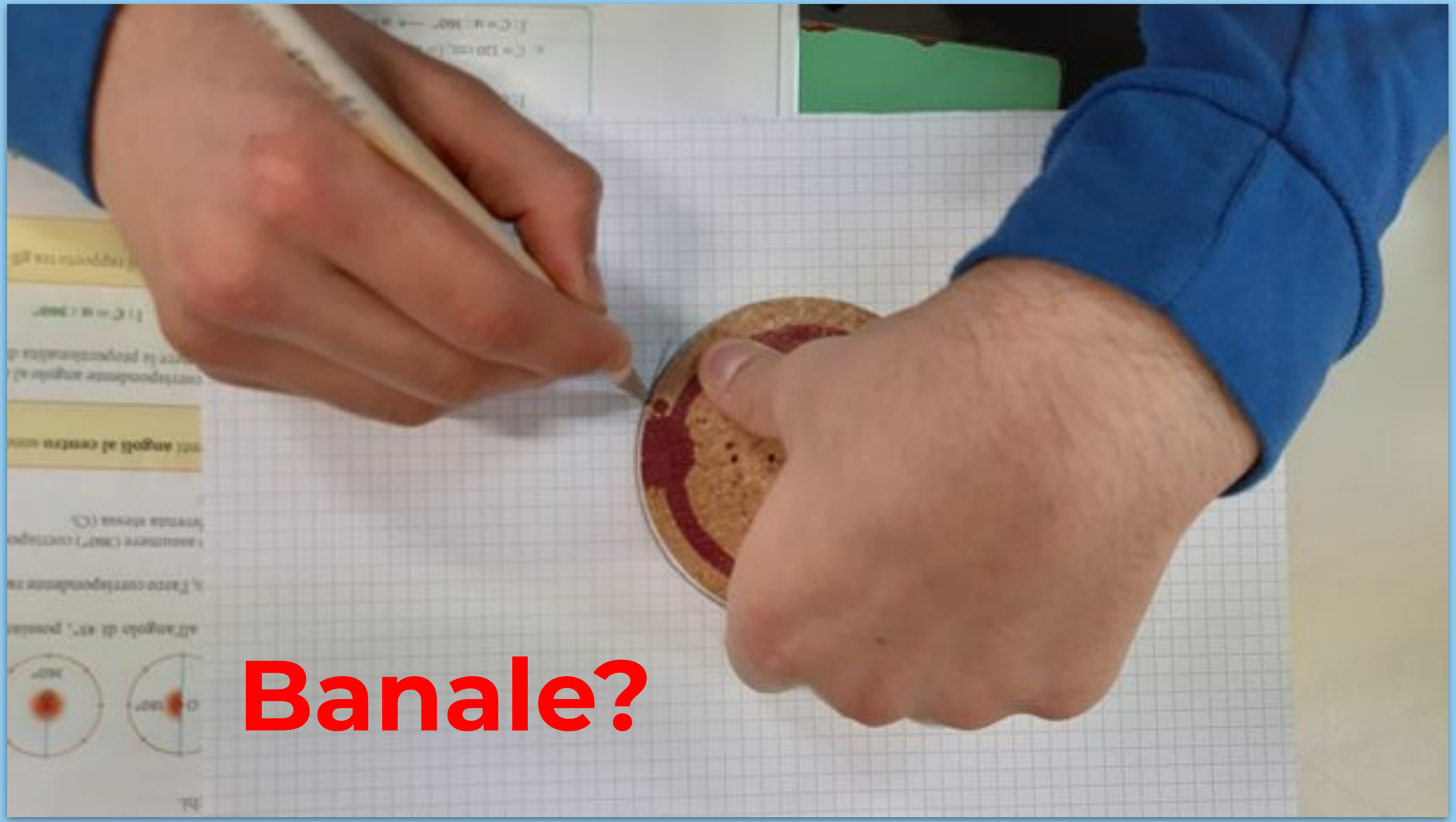
Compito: calcolare il *rapporto* tra la misura della circonferenza e quella del diametro della base di ciascun oggetto.

MATE live SCIENZE

Alla scoperta di π

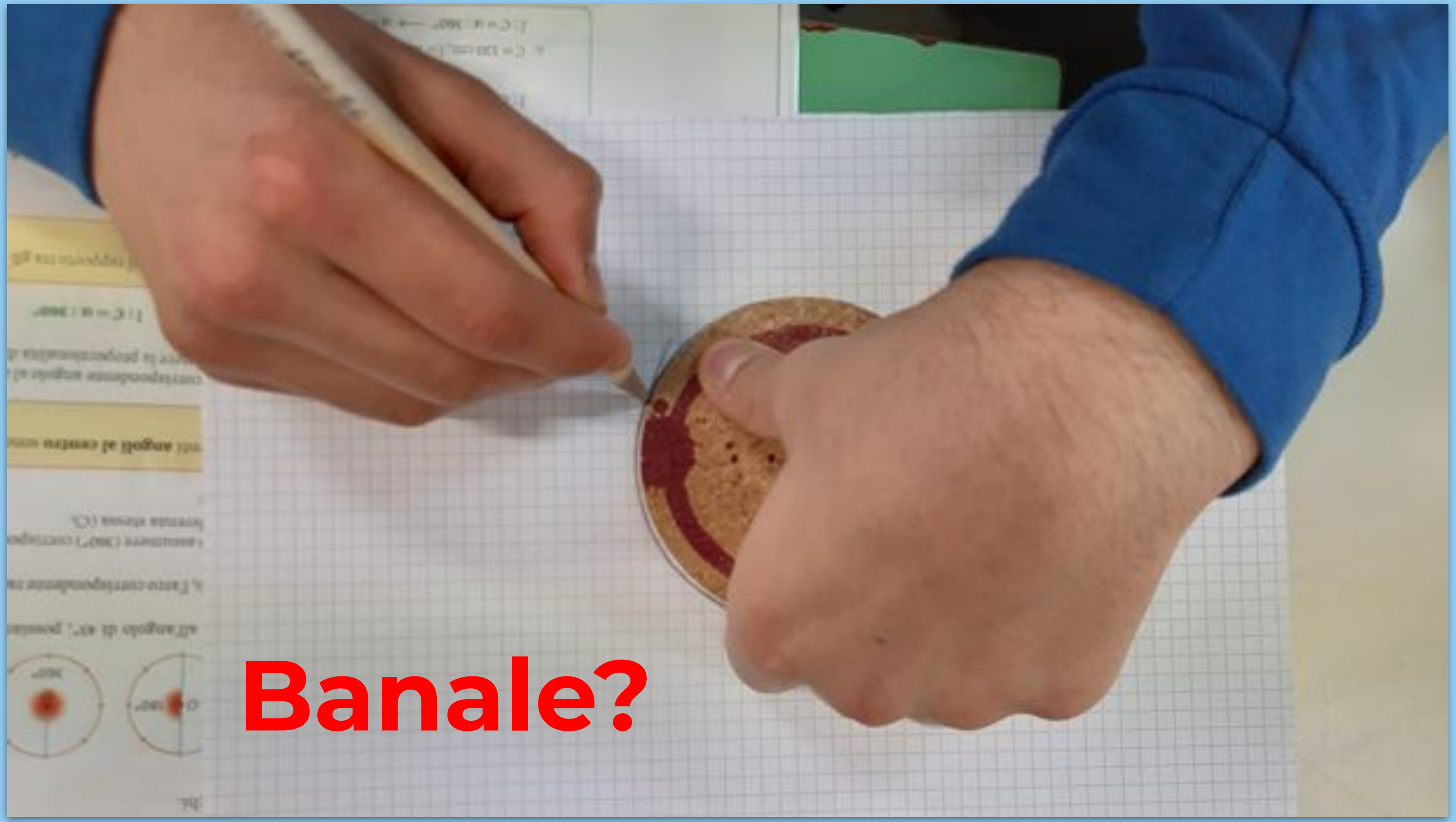


Alla scoperta di π



MATE live SCIENZE

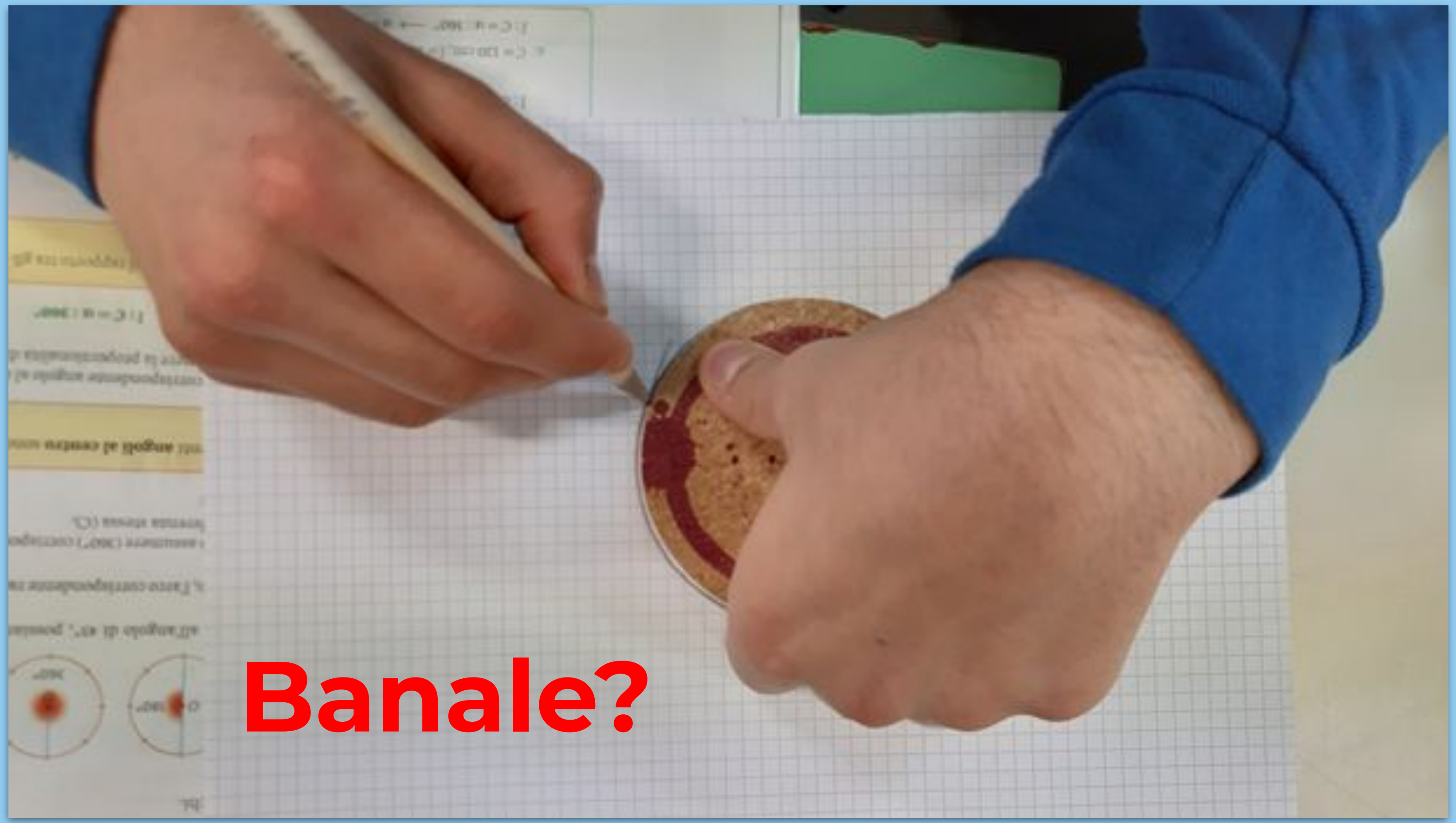
Alla scoperta di π



- Come misurare la circonferenza con il righello dopo averla disegnata?

MATE live SCIENZE

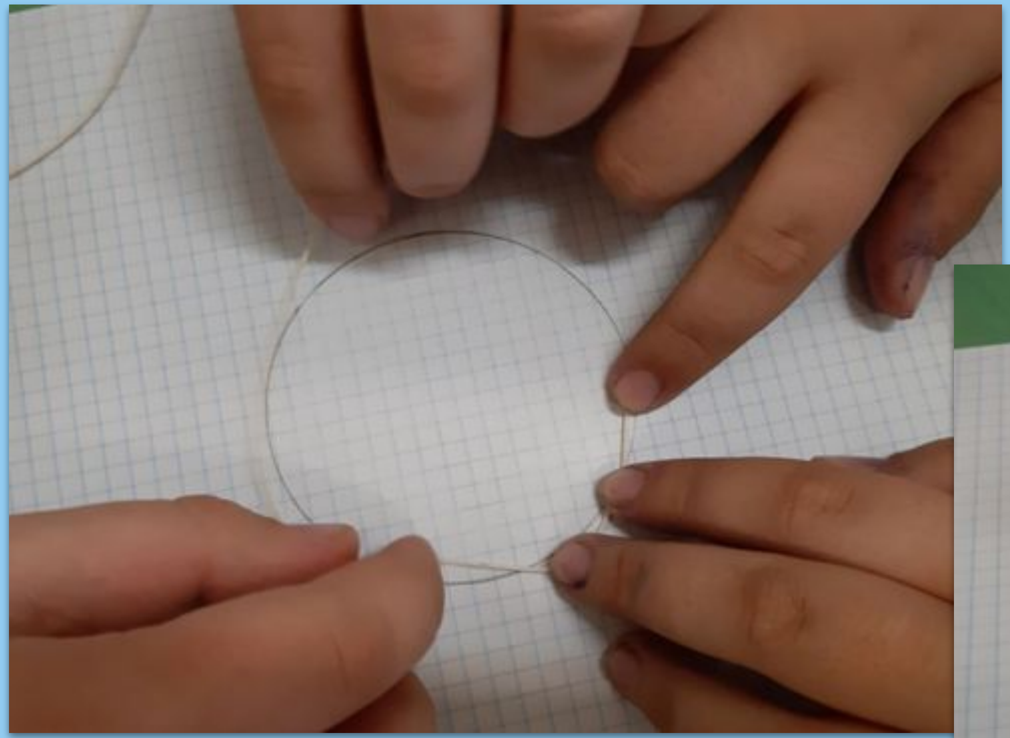
Alla scoperta di π

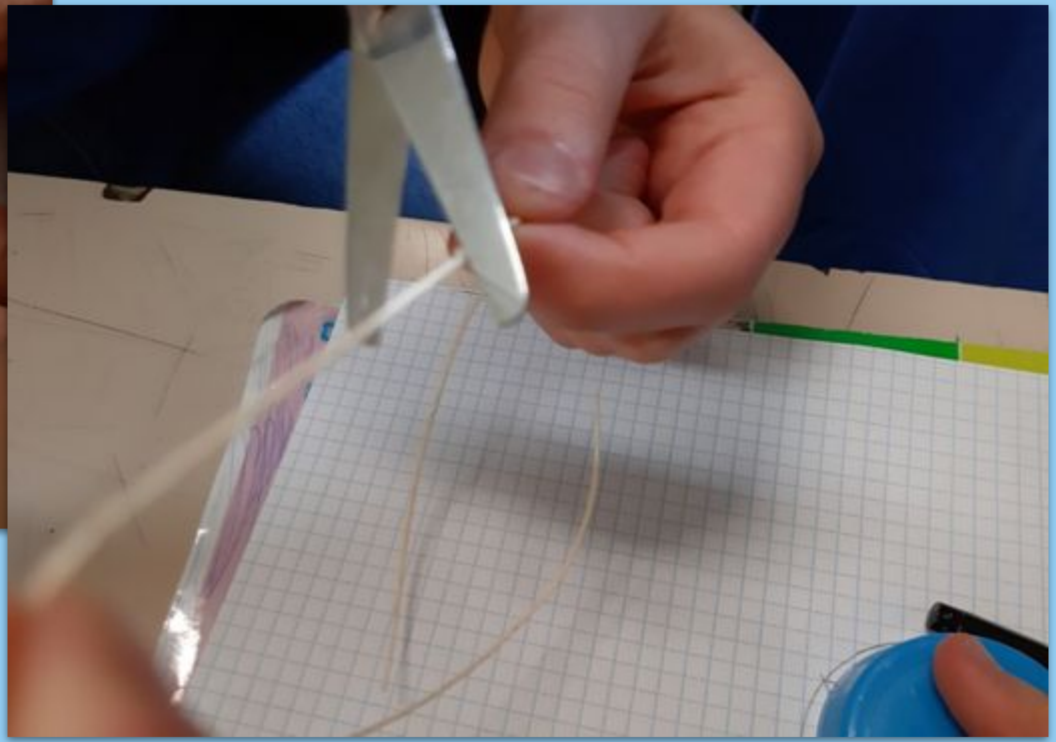


- Come misurare la circonferenza con il righello dopo averla disegnata?
- Come tracciare il diametro se non è individuato il centro della circonferenza?

MATE live SCIENZE

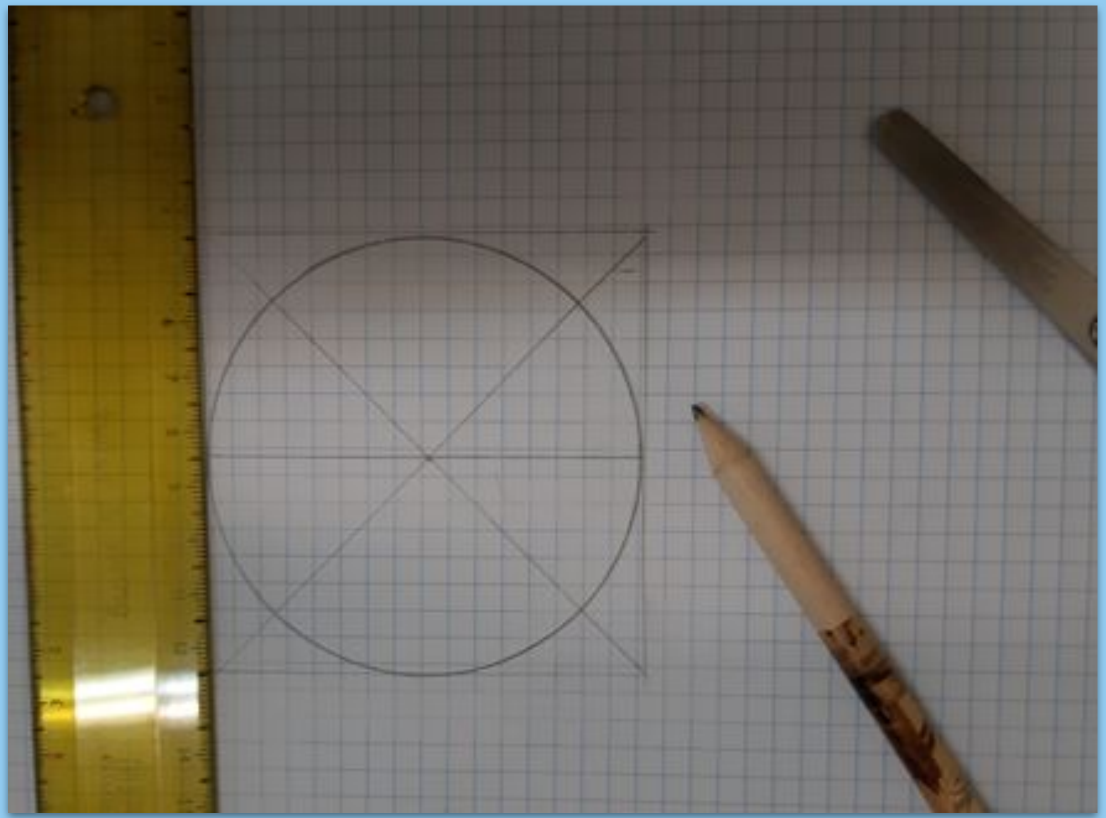
Rettificare la circonferenza

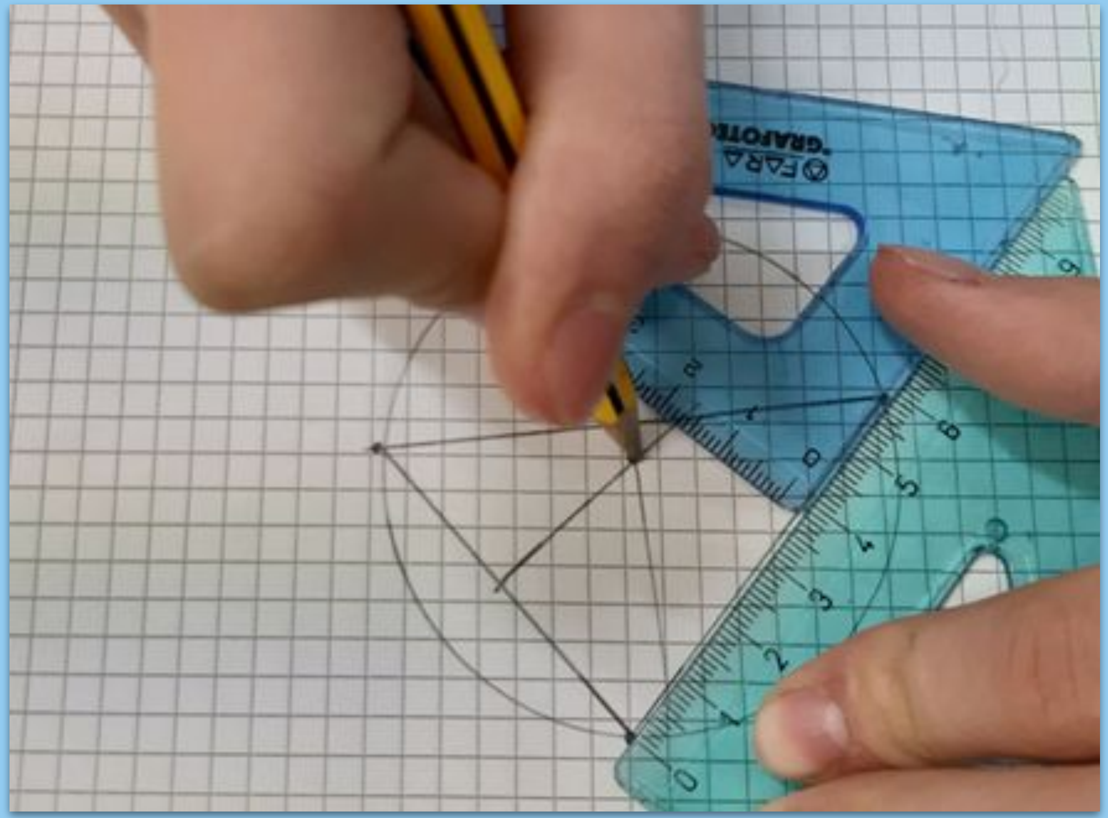


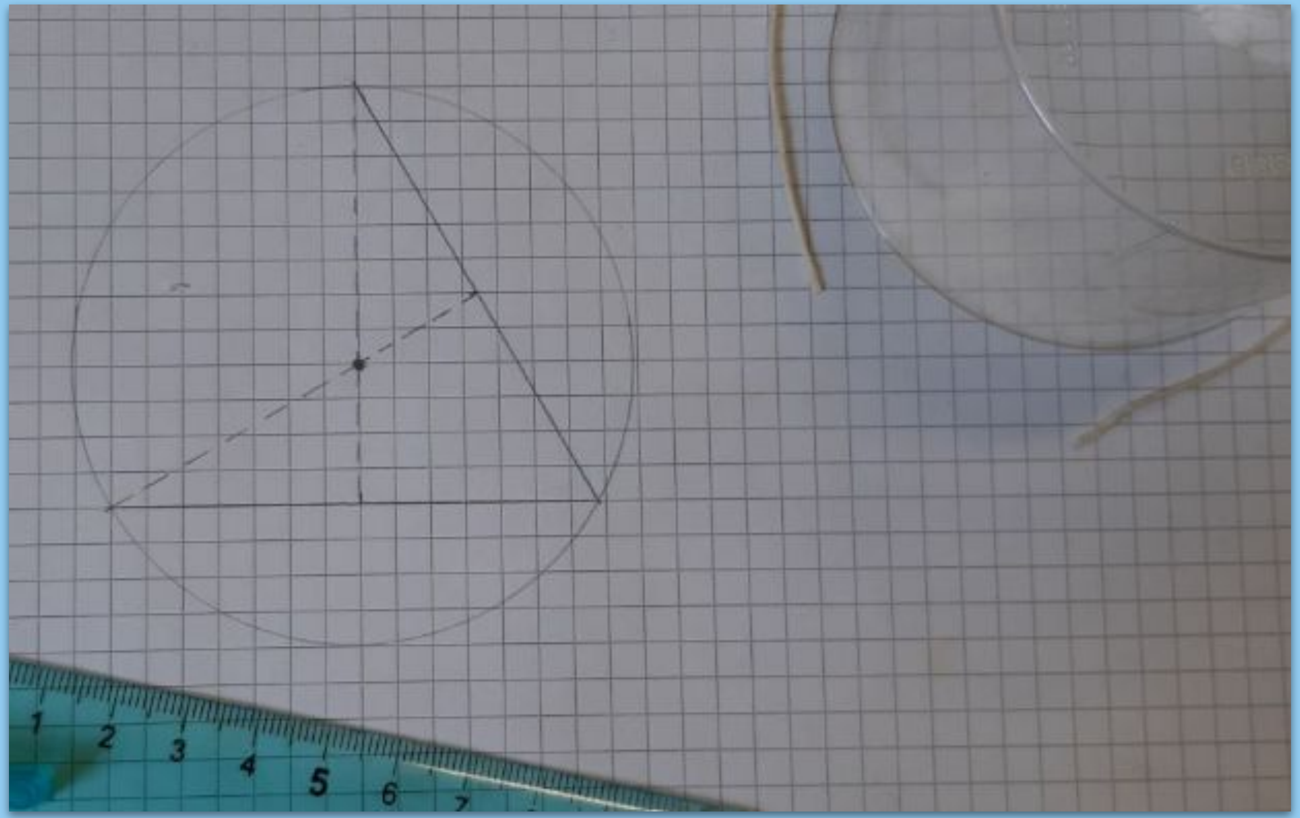


MATE live SCIENZE

Individuare il centro della circonferenza

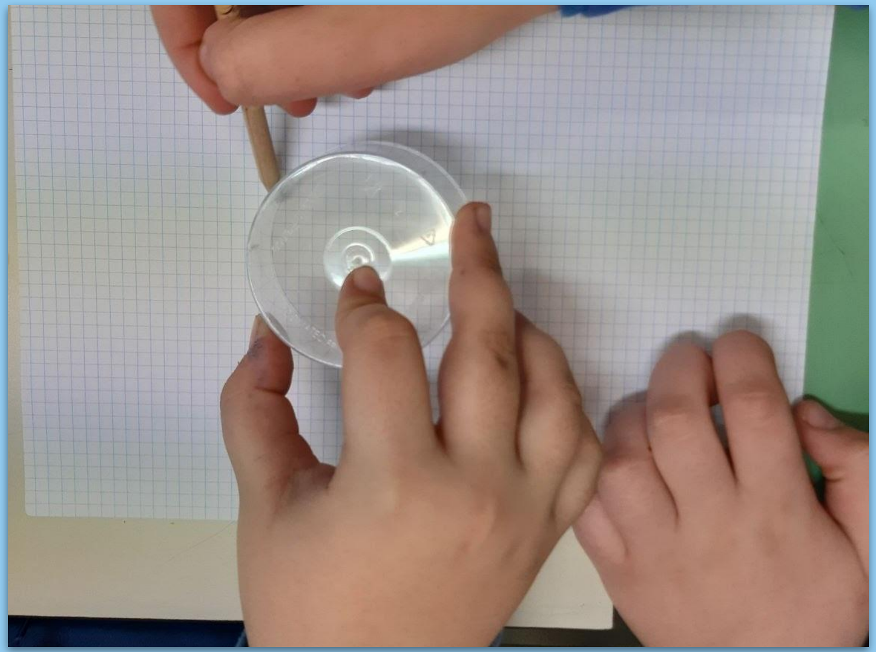


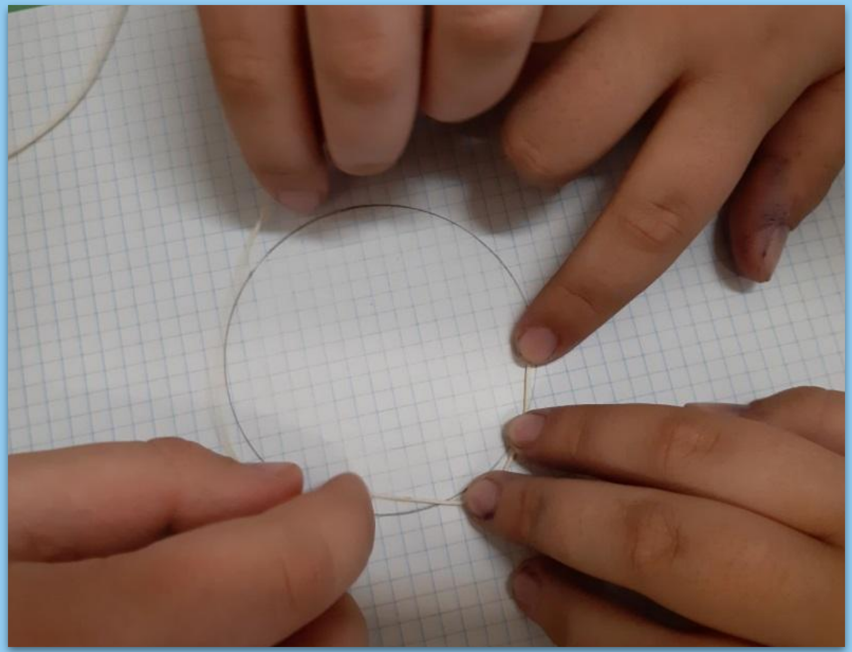


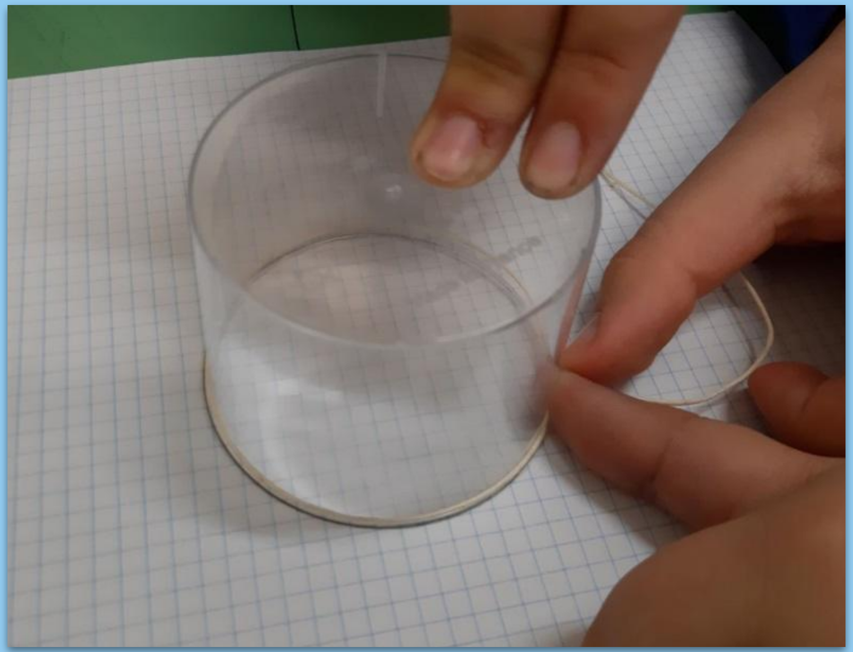


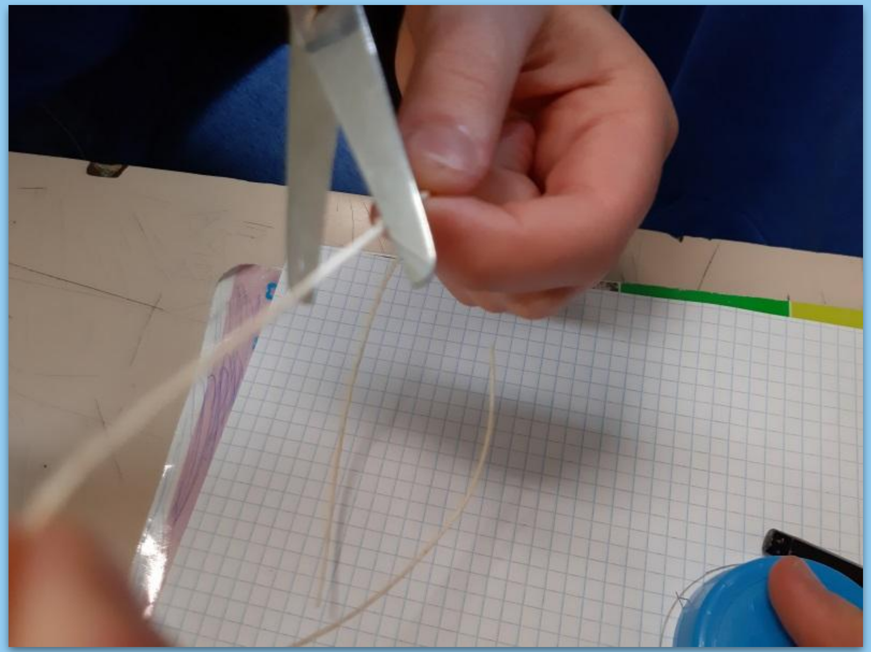
MATE *live* SCIENZE

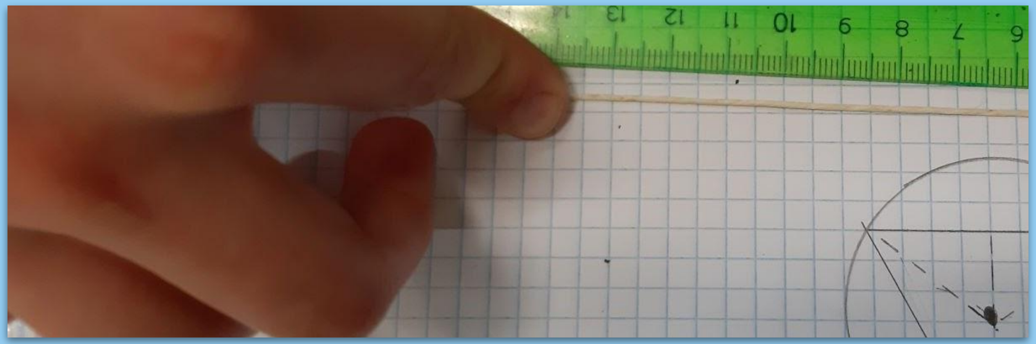
Alla scoperta di π







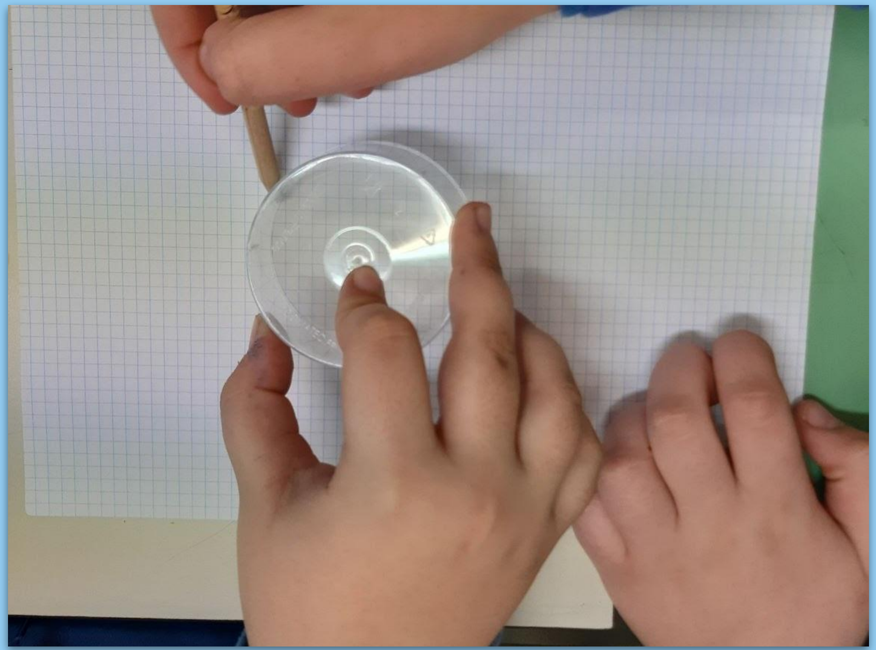
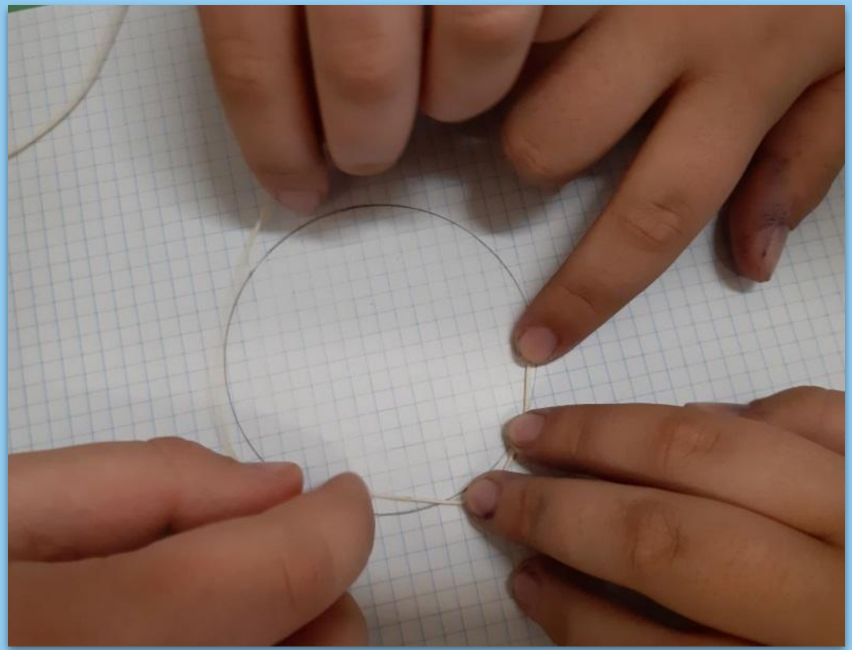
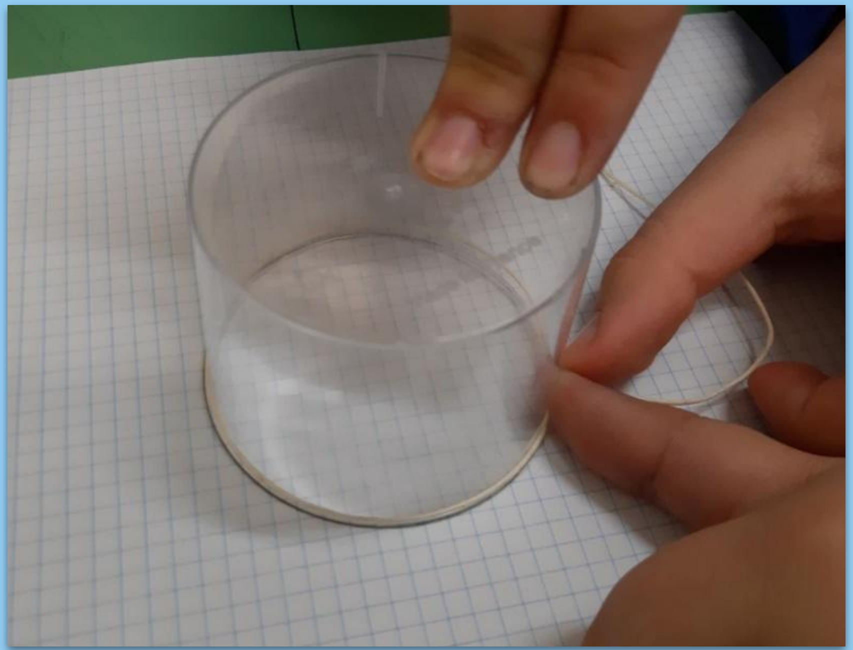
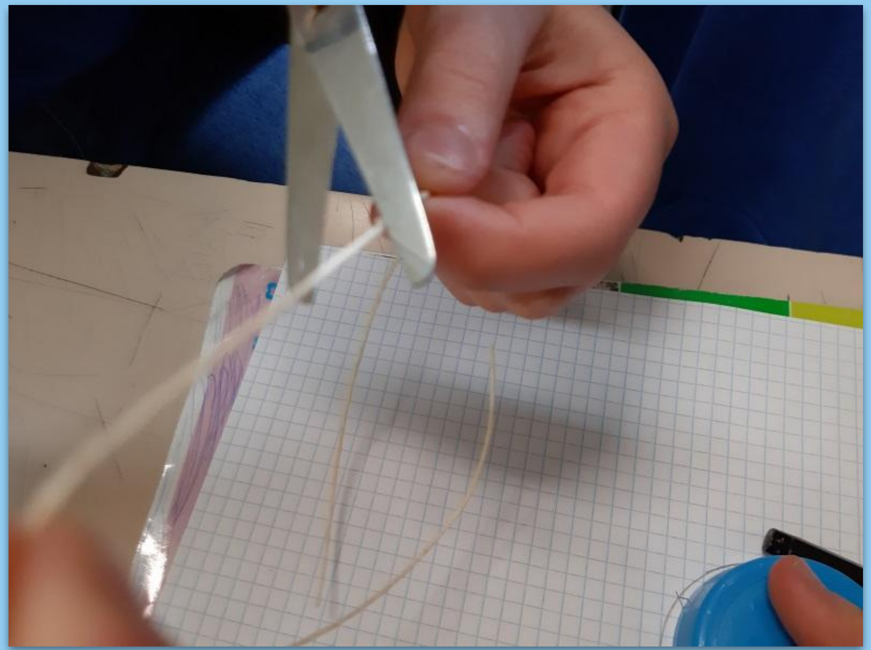


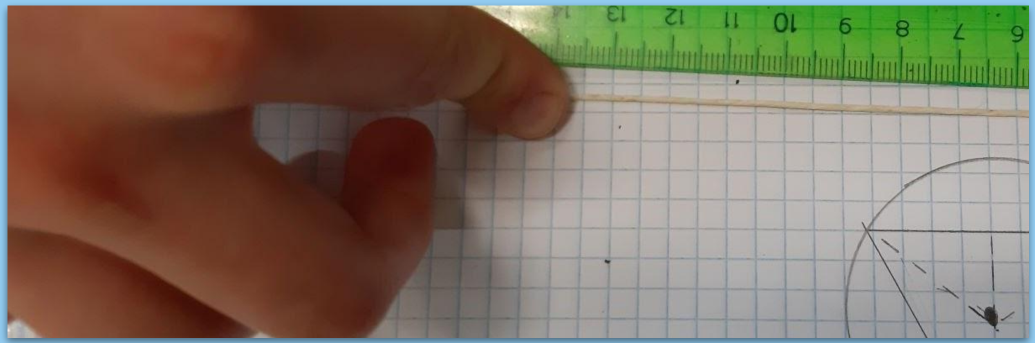


Gli studenti **scoprono** che, in ogni caso, **il rapporto** tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro **è circa 3**.

Questo rapporto è costante e si indica con la lettera greca π

Alla scoperta di π




Gli studenti **scoprono** che, in ogni caso, **il rapporto** tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro **è circa 3**.

Questo rapporto è costante e si indica con la lettera greca π

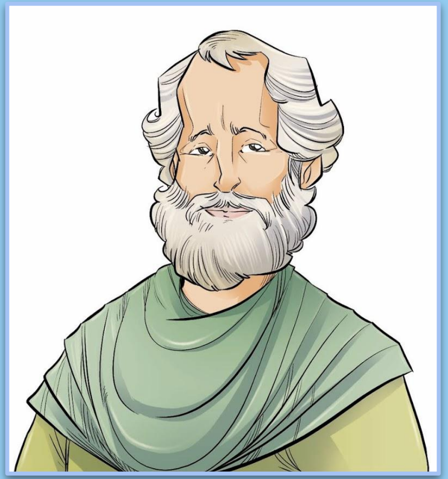
$$C=2\pi r$$

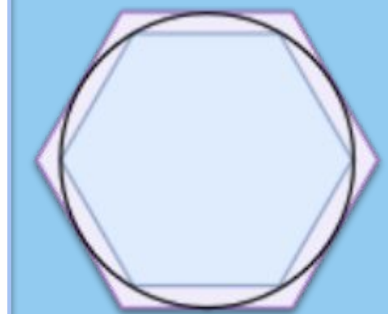
MATE *live* SCIENZE

Fase 2
π nella storia: dai babilonesi ad Archimede

- I **babilonesi** avevano fissato il valore di **pi greco** a **3,125** come testimonia la tavoletta 7302 ritrovata a Susa, in Mesopotamia (attuale Iran) e risalente al **2000 a.C. circa**

- Anche gli **egizi** sapevano che il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro è costante. Il problema numero 50 del papiro di Rhind (**1700 a.C.**) ci fornisce il valore di questa costante: **3,16049**





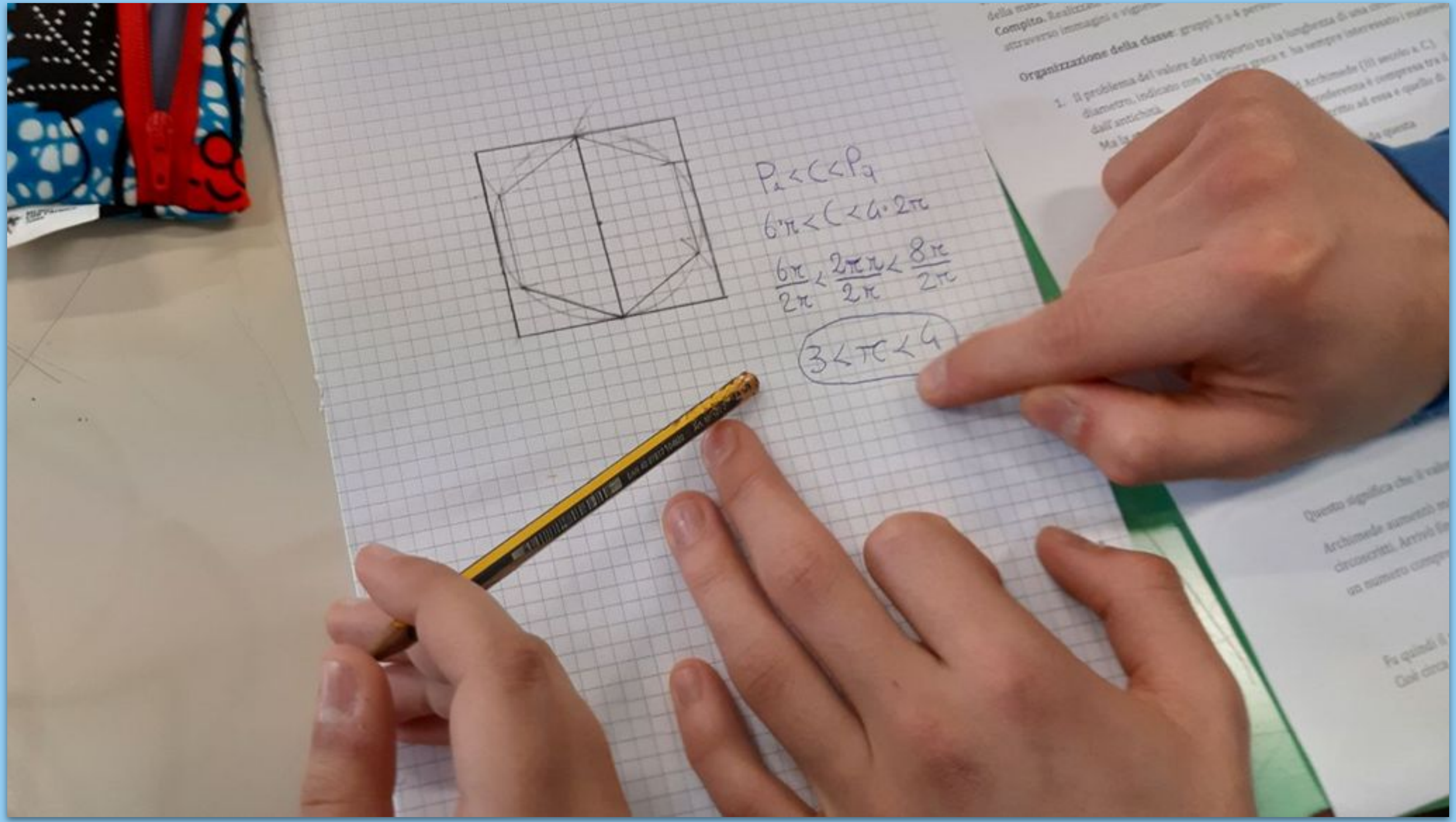
- **Archimede** di Siracusa (**287 – 212 a.C.**) è il primo a proporre un «metodo scientifico» per il calcolo di pi greco, noto come **metodo di esaustione**. Archimede calcola le prime tre cifre decimali esatte di pi greco: **3,141.....**

MATE live SCIENZE

Fase 3

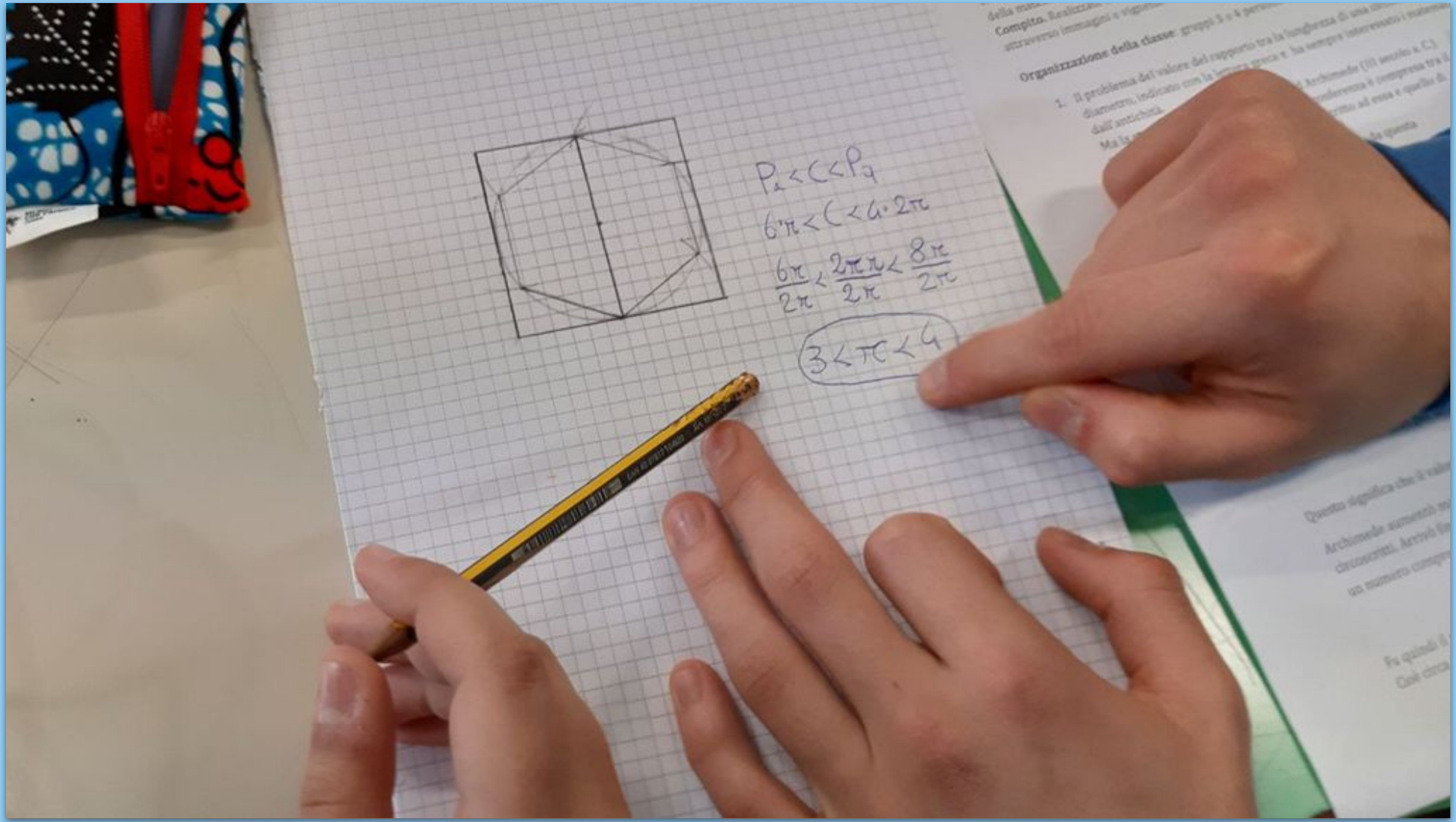
Il metodo di esaustione

Costruzione di un esagono regolare inscritto in una circonferenza e di un quadrato circoscritto a essa.
La misura della circonferenza è compresa tra i perimetri di questi due poligoni.



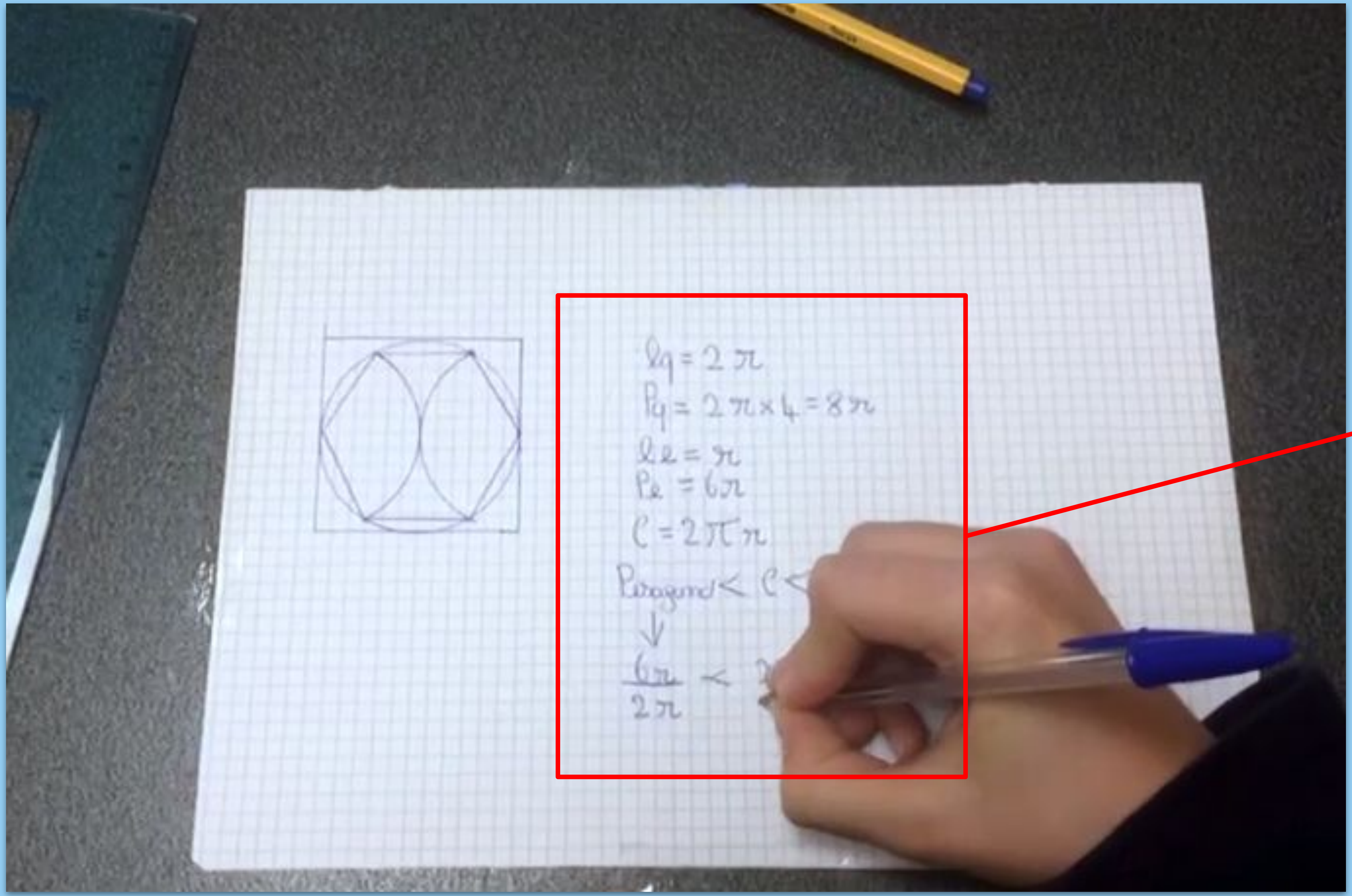
Fase 3
Il metodo di esaustione

Costruzione di un esagono regolare inscritto in una circonferenza e di un quadrato circoscritto a essa.
La misura della circonferenza è compresa tra i perimetri di questi due poligoni.



Il valore di pi greco è compreso tra 3 e 4

Fase 3
Il metodo di esaustione

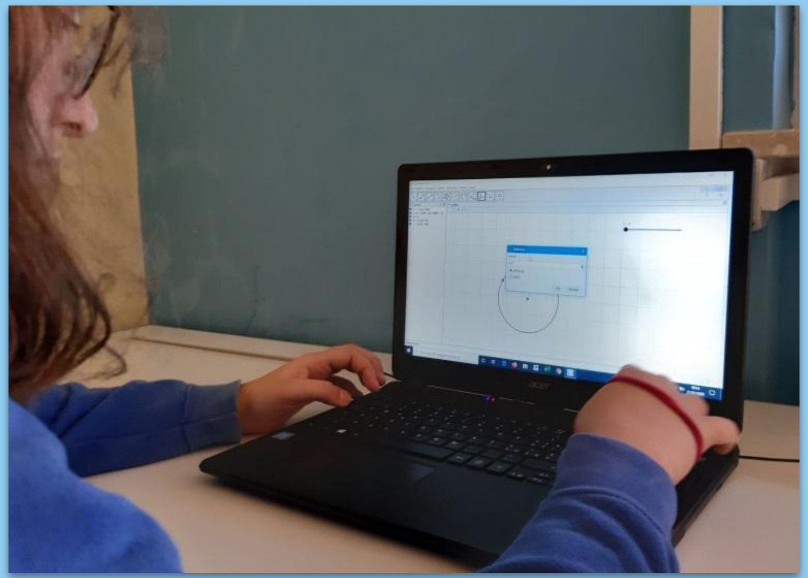


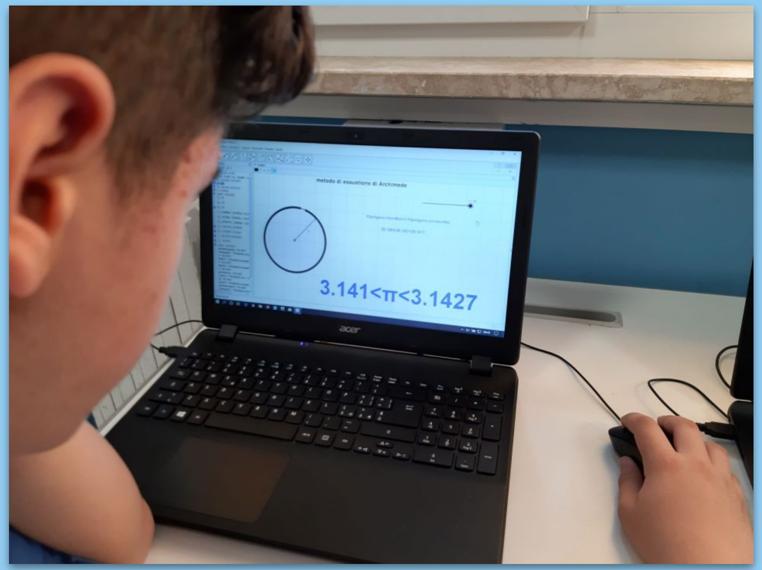
Avvio alla dimostrazione

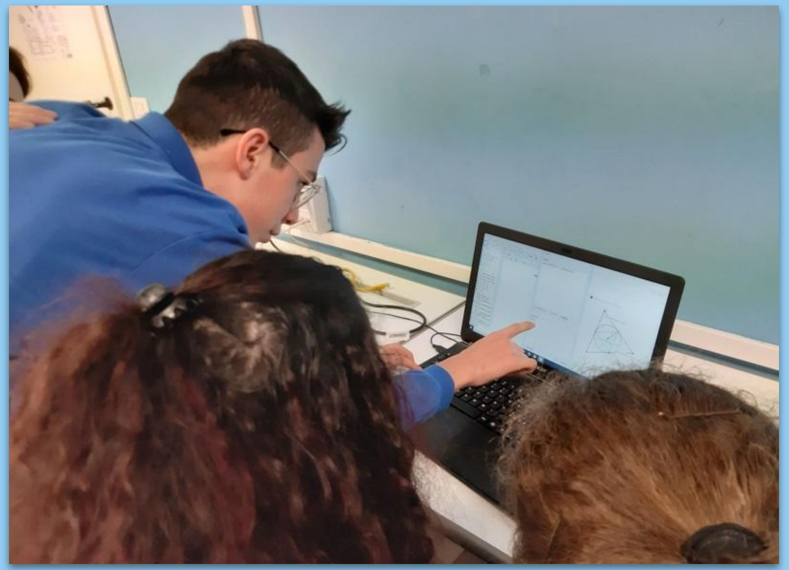
Il valore di pi greco è compreso tra 3 e 4

Il metodo di esaustione con GeoGebra

Costruzione di **poligoni regolari inscritti e circoscritti** a una circonferenza.



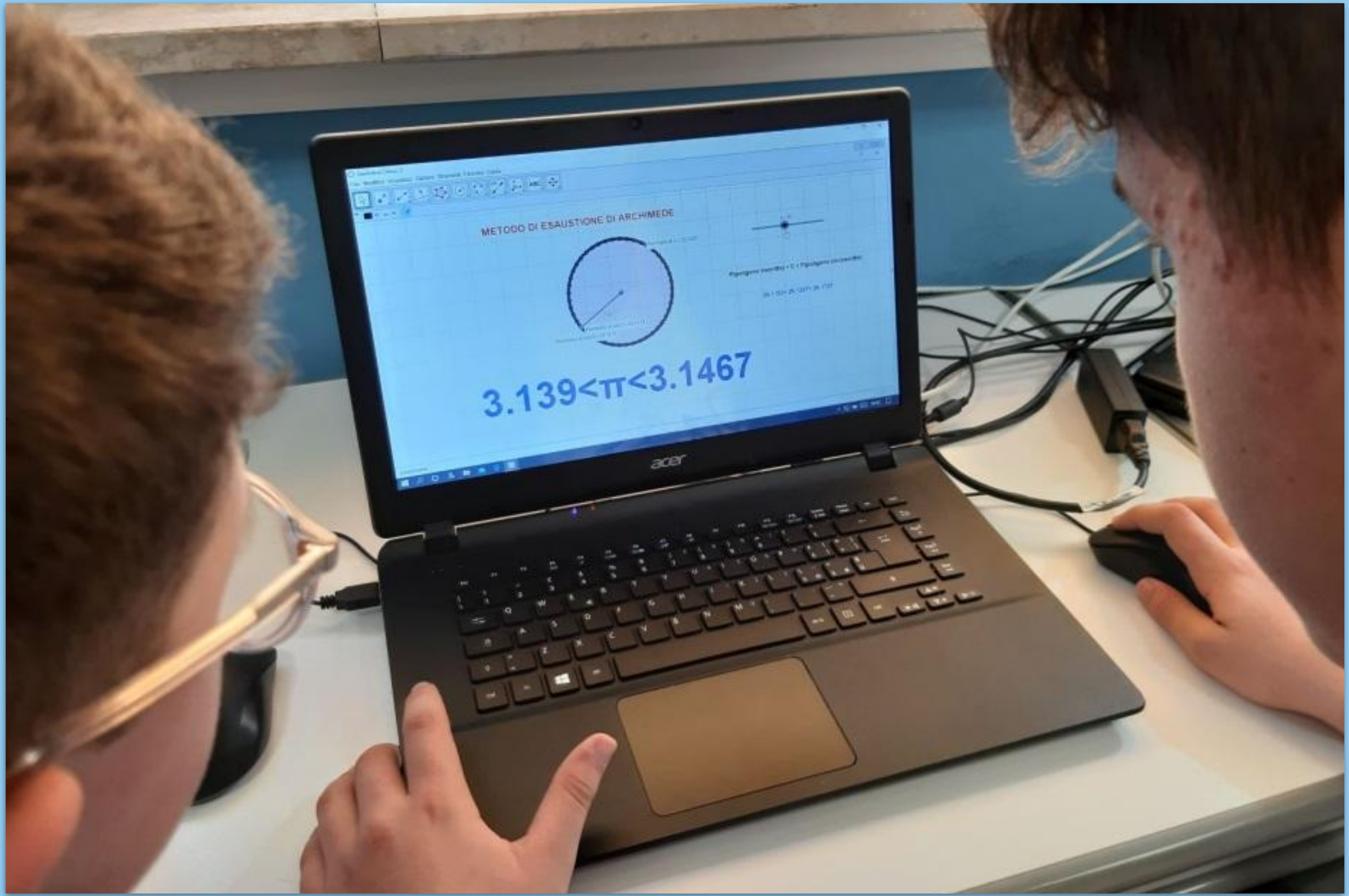




MATE *live* SCIENZE

Il metodo di esaustione con GeoGebra

Uso dello **slider**; del testo statico e del **testo dinamico.**



MATE live SCIENZE

Fase 4
π nella storia

- Nel **1424** il matematico persiano **Al Kashi** calcola il valore di pi greco fino alla sedicesima cifra decimale.

- Nel XVII secolo si assiste a un'esplosione di cifre e, nel **1706,** il matematico e astronomo inglese **John Machin** ne calcola il valore fino alla 100-esima cifra decimale.

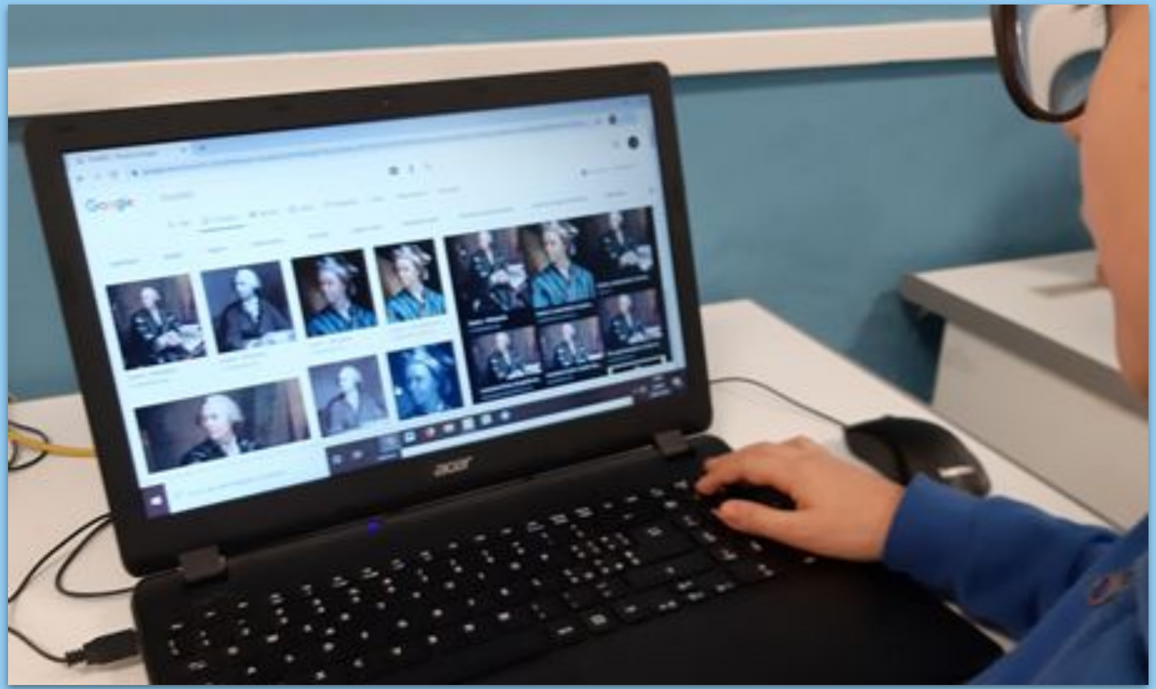
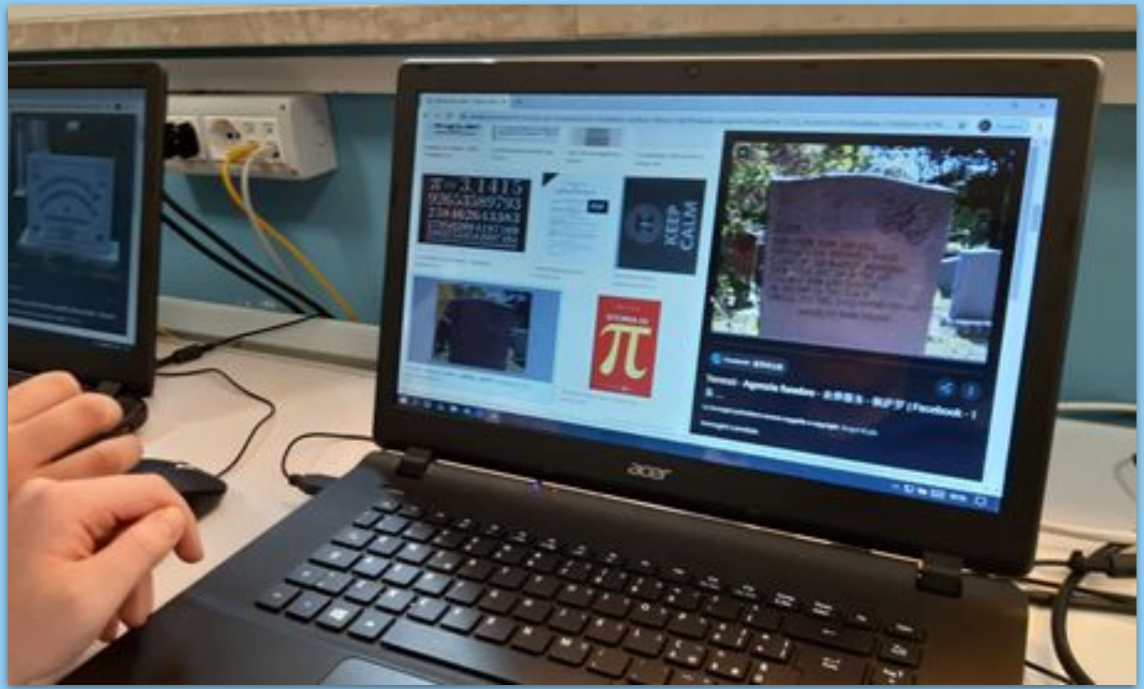
- Nel **1768, Johann Heinrich Lambert,** matematico tedesco, dimostra che **π è un numero irrazionale**.

- **L'uso del simbolo π** lo propone l'inglese **William Jones** nel 1706, ma diventa comune solo nel **1737,** dopo che viene adottato dal grande matematico e fisico svizzero **Eulero**.

MATE*live* SCIENZE

Fase 4

π nella storia

Record di cifre

Oggi si conoscono migliaia di miliardi di cifre di π, calcolate con l'aiuto di algoritmi informatici.

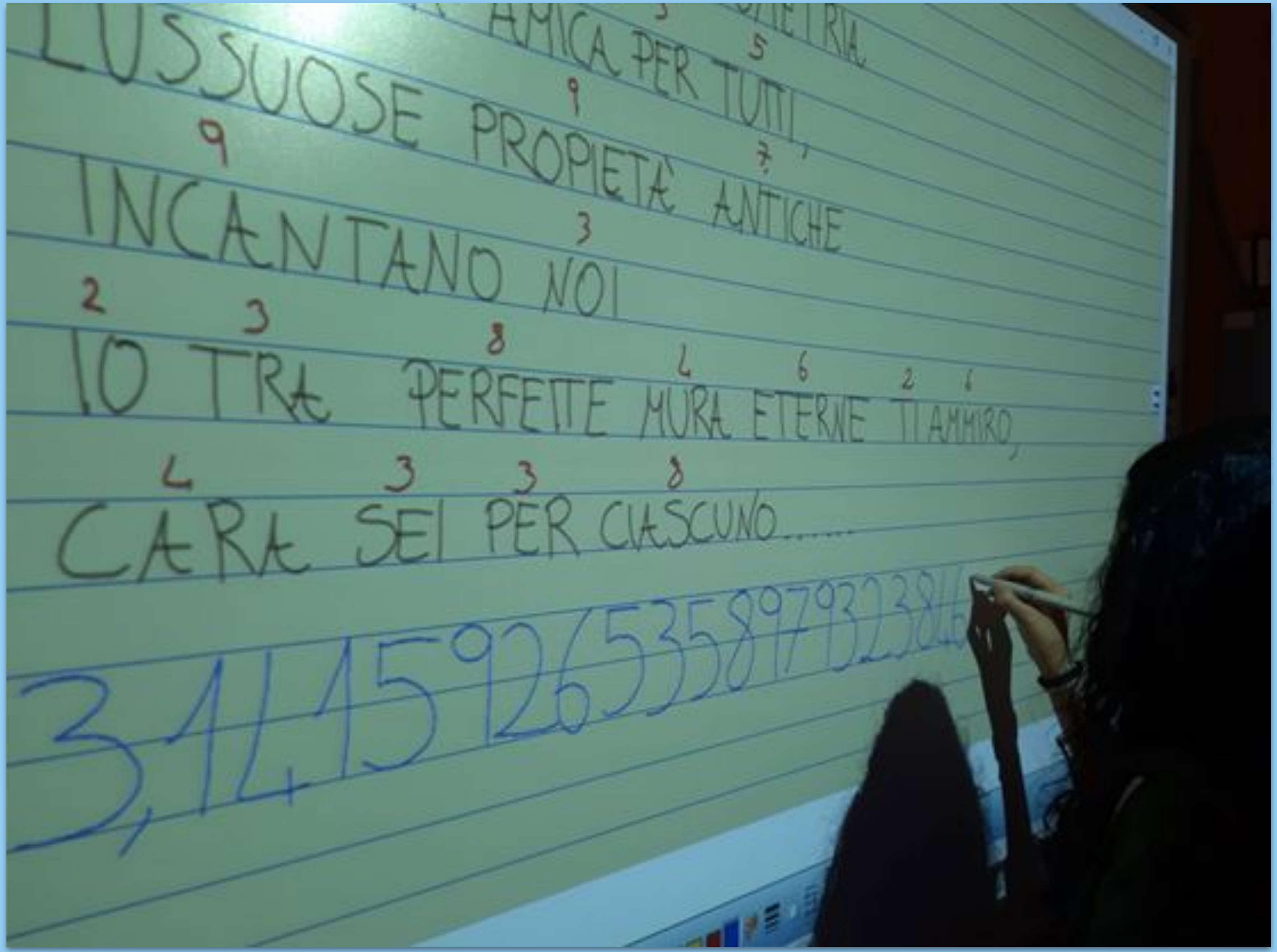
- Il **14 marzo del 2019** un'impiegata giapponese di Google, Emma Haruka Iwao, ha calcolato il valore di pi greco fino a 31000 miliardi di cifre.

- Il **nuovo record** nella determinazione delle cifre di pi greco è stata ottenuta il **20 agosto del 2021** da un gruppo di ricercatori dell'Università dei Grigioni in Svizzera: ben 62800 miliardi di cifre.

- Di π non è ancora chiara la **frequenza** con cui compare ciascuna cifra all'interno della sua parte decimale.

MATE live SCIENZE

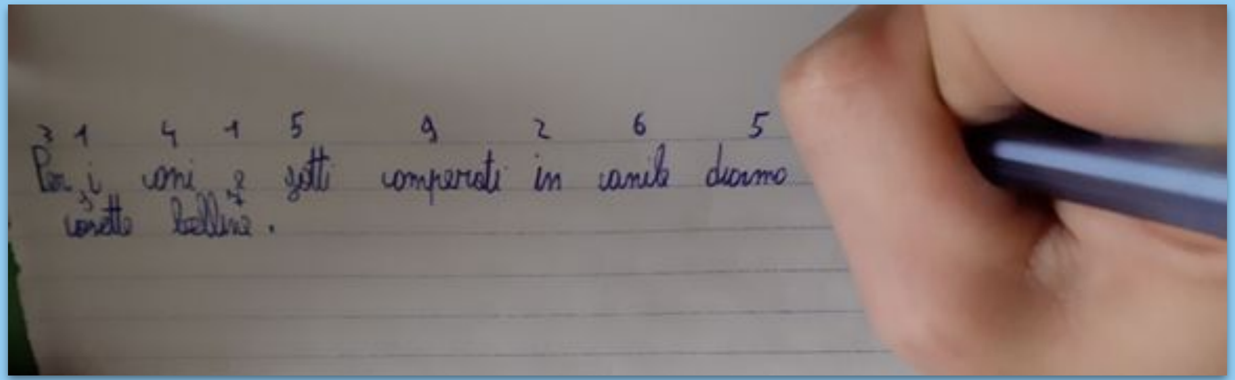
Fase 5
Filastrocche su π

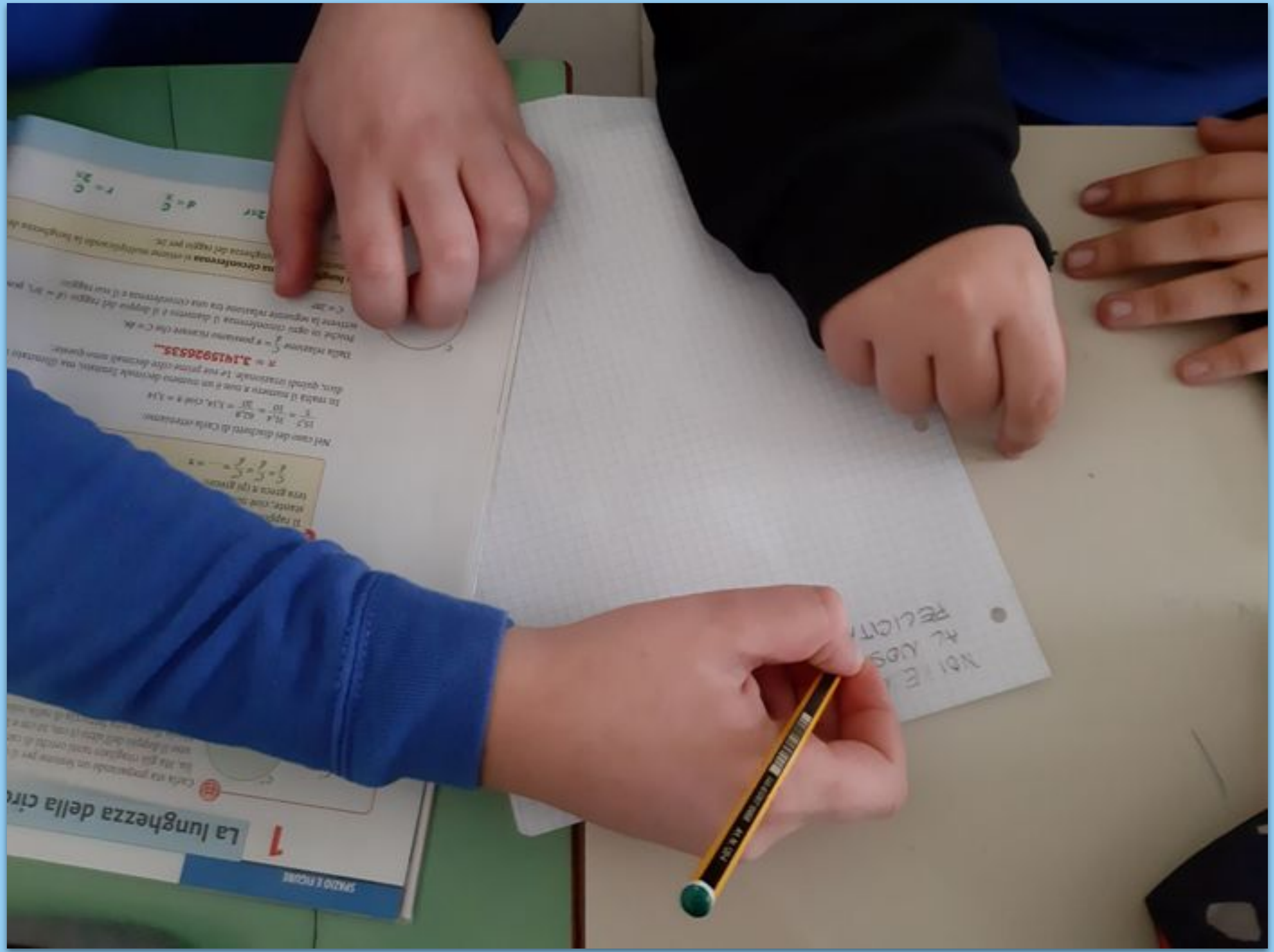


Il fascino di π è tale che molte persone fanno gare di memoria per ricordare il maggior numero possibile delle sue cifre.
Un metodo è quello di costruire «piemi», cioè frasi, filastrocche, poesie dove ogni parola è formata da un numero di lettere che corrisponde a una cifra di π.

MATE live SCIENZE

Le nostre filastrocche su π





I risultati di questo lavoro
Le competenze sviluppate

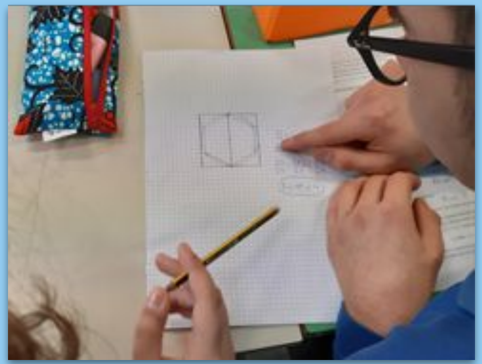
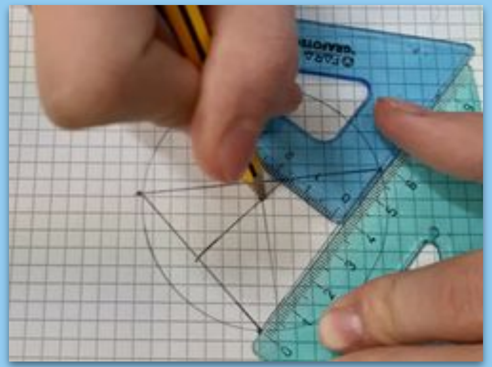
C1 - Competenza alfabetica funzionale

C3 - Competenza matematica e competenza in scienze, tecnologia e ingegneria

C4 - Competenze digitali

C5 - Competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare

C8 - Competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali


MATE live SCIENZE

Sul Pi greco

È degno di ammirazione il Pi greco
tre virgola uno quattro uno.
Anche tutte le sue cifre successive sono iniziali
cinque nove due, poiché non finisce mai.
...
Il corteo di cifre che compongono il Pi greco
non si ferma sul bordo della pagina.
È capace di srotolarsi sul tavolo, nell'aria,
attraverso il muro, la foglia, il nido, le nuvole, diritto fino al cielo,
per quanto è gonfio e senza fondo il cielo.
...

(*Wislawa Szymborska*)

MATE *live* SCIENZE

Riferimenti

- https://www.wired.it/scienza/lab/2020/03/14/pi-greco-day-tau/
- https://www.biophysics.org/blog/pi-is-encoded-in-the-patterns-of-life
- https://it.wikipedia.org/wiki/Progetto_di_legge_dell%27Indiana_sul_pi_greco
- https://www.bresciatoday.it/social/pi-greco.html
- https://it.wikipedia.org/wiki/Costante_fisica
- *Bruno Munari*, La scoperta del cerchio
- *Pietro Greco*, Storia di π greco. Carocci editore, 2018
- https://www.poesiedautore.it/wislawa-szymborska/pi-greco

MATE live SCIENZE

MONDADORI EDUCATION

Rizzoli EDUCATION

FORMAZIONE SU MISURA

WWW.FORMAZIONESUMISURA.IT

Rizzoli

EDUCATION